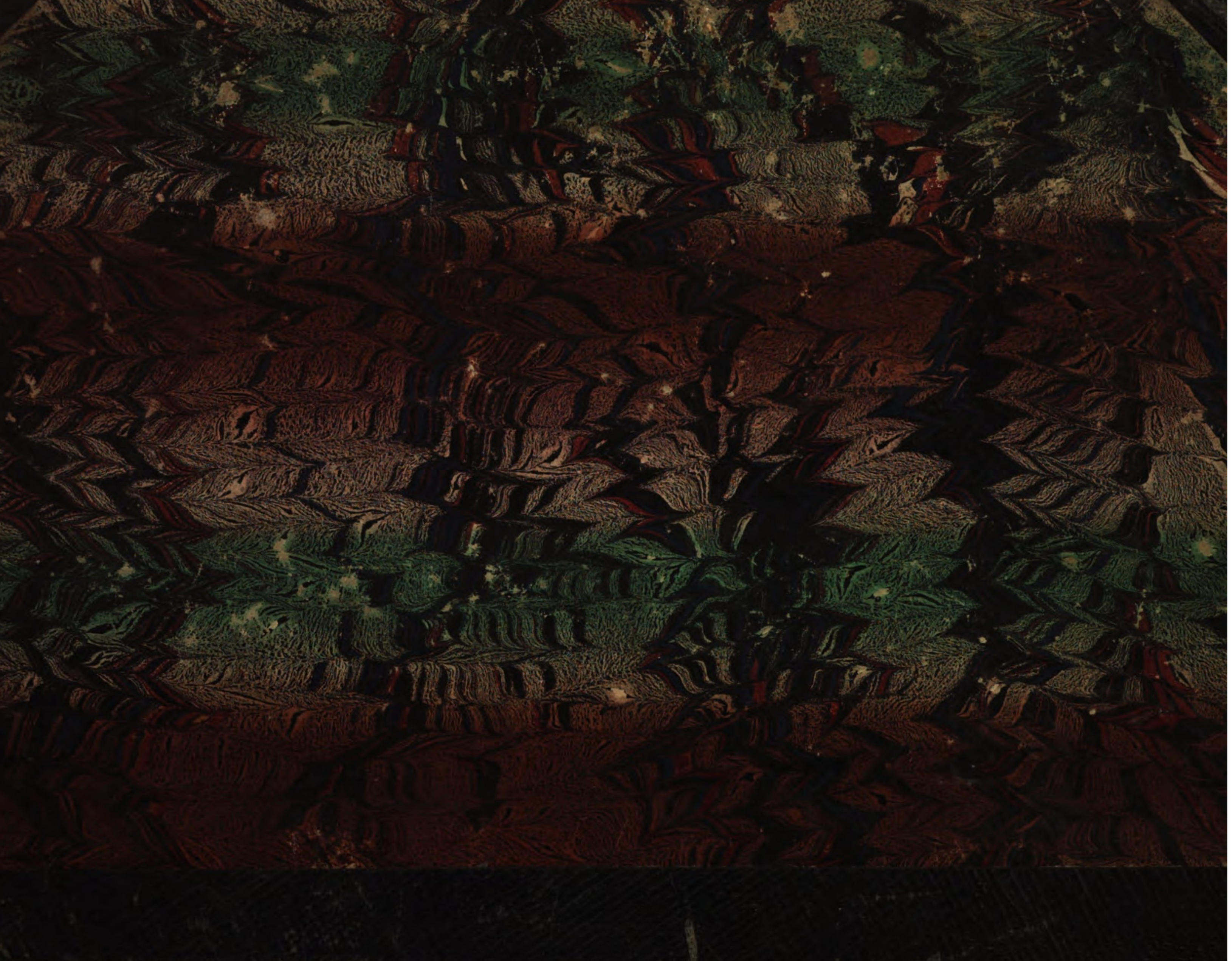


Philos. 3 Hbg. a.

Der K. Kreisbibliothek
Regensburg zum
Tausche
von

M. Stamm,
K. Kreisschulinspektor.

Regensburg, 22. Okt. 1890.

Carl Fried. Heerdegen
Dr.

1892

K. alt Postpraktikant in Regensburg.
1880

Lehre

von der

ALGEBRA.

K. KREISBIBLIOTHEK
KRONSTADT

BIBLIOTECA CENTRALE

Addition und Subtraction mit Buchstaben.

1) Addition.

1. Um mehrere Buchstabengrößen zu addiren, ist es nöthig die Theile zu suchen, das heißt diejenigen, welche gleich sind. Sind die Größen endlich so mache man sie in alphabetischer Ordnung zusammengesetzt, suche sie gleiche, so wie die Theile derselben zu ordnen.

z. B. $6a + 4z - 3x + 12m = 6a + 12m - 3x + 4z$.

Sind hier Theile, welche der Größe ungleich sind, nicht vorhanden, als sie in alphabetischer Ordnung nacheinander zusammengesetzt.

2. $3a + 6a + 5ab - 2ab = 9a + 3ab$.

Wenn mehrere solche Größen gegeben sind, so addire man sie zuerst nach den Alphabeten, setze sie mit ihren Zeichen und mache die Buchstaben in alphabetischer Ordnung zusammen.

6. Subtraction

Wenn die abzuziehenden Größen mit den gegebenen, wenn sie abzuziehen sind, gleiche Buchstaben haben, so wird die Subtraction nur durch Zusammenziehung gemacht. Die Größen mit ungleichen Buchstaben werden nur angezeigt, indem man den Buchstaben nach die Größen mit den Abzuziehenden, setzt so gesamt nicht zusammenziehen, indem die abzuziehenden Größen alle Zeichen die entgegengesetzten haben müssen, wenn sie gleich sind.

$$19a - 11a = 8a$$

$$24(3a-2b) - 17(3a-2b) = 7(3a-2b)$$

$$31(4a-9b+6c) - 26(4a-9b+6c) = 5(4a-9b+6c).$$

Wenn sich aber in den gegebenen Größen gleichnamige Buchstaben so finden, daß sie zum Theil in den Abzuziehenden, theils in gesamt nicht zusammenziehen, indem die abzuziehenden Größen alle Zeichen die entgegengesetzten haben müssen, wenn sie gleich sind.

Beispiele.

Der Grund dieser Einrichtung beruht darauf, daß Brüche gleichen Nenner addirt so viel heißt, als Dinge gleicher Benennung addiren; addire ungleichen Brüche soviel als ungleiche Dinge.

Multiplication und Division der Brüche.

a) Multiplication der Factorzähler.

Wenn man Zähler mehrer Factoren mit Factoren alle Producte, welche daraus entstehen, suchen heißt, und diese Producte Zähler nennt, so heißt das Product von 2 Factoren das 2te, von 3 Factoren das 3te Factum, von n Factoren das n^{te} Factum, d. h. wenn die Factoren gleich sind.

z. B. a^2 = das zweite Factum
a^3 = " dritte " } von a
a^n = " n^{te} " "

Wird man sich hier so wie bey der Summirung, Differenz, Product, und Quotient verhalten.

Die Größen a, a, a, etc. zum Potenzen summirt, sind

$a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$ die Wurzel.

Potenzen von gleichen Wurzeln, oder ungleichen Wurzeln

immer dazu genommen, welche die nemliche Wurzel haben

z. E. a^3, a^5.

Potenzen von verschiedenen Wurzeln können, wenn

Wurzelzeichen beybehalten sind.

Um Potenzen von verschiedenen Wurzeln mit einander zu

multiplizieren, müssen dieselben mit den Multiplicatoren

zuerst, in welche sie sich verwandeln lassen, Factoren der

Einheit multiplicirt. z. E. $a^2 \times b^3 = a^2 \times b^3$ etc. Allgemein

$a^m \times b^n$.

Wie oben Potenzen mit einerley Grundzahl multiplizirt werden, so werden auch Potenzen mit einerley Grundzahl dividirt, indem man die Exponenten von einander abzieht. So ist

$a^3 : a^2 = \frac{aaa}{aa} = a = a^1$ Im Allgemeinen

$a^m : a^n = a^{m-n}$

Ist $m = n$, so ist $a^m : a^n = a^{m-n} = a^0 = 1$

Es ist also jede Potenz, deren Exponent 0 ist, = 1.

In diesem Falle setzt man die Grundzahl einmal und gibt ihr einen Exponenten, welcher dem Exponenten der gegebenen Potenz gleich ist. So ist $a^0 = a^3 : a^3 = a^{3-3} = a^{3\times 2} = a^6$

Im Allgemeinen $(a^m)^n = a^{m\times n}$.

Wenn wir mit ungenannten Factoren behaftete Producte zu einander dividiren, so dividirt man die Factoren

dieser Potenz erhoben werden und weil dieses Produkt
sechsmal vorkommt, das Produkt zu bilden seyn.
Z. B. $ab^3 = a^3 \times b^3$ denn $ab^3 = ab.ab.ab = aaabbb =$
a^3b^3.

Soll man einen Bruch zu irgend einer Potenz erheben,
so muß sowohl sein Zähler als sein Nenner auf diese
Potenz erhoben werden.
Z. B. $\left(\frac{a}{c}\right)^3 = \frac{a^3}{c^3}$ denn $\left(\frac{a}{c}\right)^3 = \frac{a}{c} \times \frac{a}{c} \times \frac{a}{c} = \frac{a.a.a}{c.c.c} = \frac{a^3}{c^3}$.

Wenn der Klammer Minus vorsteht, so werden
sämtliche Potenz derselben, oder selbst ihr Produkt
das Produkt und der vorstehende Bruch ist einem Plus
als ist der seiner Potenz.

F.

6. Multiplikation mit Buchstabengrößen.

Um zu multiplizieren mit Buchstabengrößen setzt man zuerst die einen neben die andern, die Faktoren, und bezeichnet das Produkt durch einen Punkt zwischen beiden, oder durch Einschließung in Klammern. Die Faktoren werden nach dem Alphabet geordnet, und gleiche Buchstaben durch Exponenten zusammengezogen.

1)
$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Faktoren} \\ \\ \\ \text{Teilprodukte} \\ \\ \text{Produkt} \end{array} \right.$$

II $\begin{array}{l} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ \quad -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array}$ Quadrat

III. $\begin{array}{l} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ \quad -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \end{array}$ Quadrat

IV $\begin{array}{l} a+b-d \\ a-b-d \\ \hline a^2+ab-ad \\ \quad -ab-b^2+bd \\ \quad\quad -ad-bd+d^2 \\ \hline a^2-2ad-b^2+d^2 \end{array}$

V $\begin{array}{l} 5a-2b-d \\ 2a+3b-2d \\ \hline 10a^2-4ab-2ad \\ \quad +15ab-6b^2-2bd \\ \quad\quad -10ad+4bd+2d^2 \\ \hline 10a^2+11ab-12ad-6b^2+6d+2d^2 \end{array}$

VI $5a^m + 3b^n$
$3a^m - 2b^n$

$15a^{2m} + 9a^m b^n$
$\quad - 10a^m b^n - 6b^{2n}$

$15a^{2m} + a^m b^n - 6b^{2n}$

Die vorstehende Aufgabe lautet allgemein: Die Summe zweier Binome mit einem Theil gleichen Gliedern multiplicirt man, indem man jedes Glied des einen Binoms mit jedem Gliede des andern multiplicirt, und die Producte addirt.

Der 3te Theil, stellt a+b die Summe der beiden Zahlen und a−b zeigt die Differenz dieser Zahlen an. Das Product beider Summen ist $a^2 - b^2$ d. i. die Differenz der Quadrate beider Zahlen.

Da dieselben jedesmal zwei Factoren möglich machen, welche ist folgende allgemeine Regel zu merken.

Wenn man die Summe zweier Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt, so giebt das Product den

Unterschied zweier Potenzen durch dieselben Zahlen.

1. Division der Potenzgrößen.

1. Haben die zu dividirenden Potenzen verschiedene Coefficienten, so kann man die Division zuerst verrichten. Z. B. $a^{10} : a^{12}$ $a^{10} : a^{12}$ $= \frac{a^{10}}{a^{12}}$.

2. Haben die zu dividirenden Potenzgrößen gleiche Coefficienten, so wird der Quotient gefunden, wenn man den Coefficienten gleich setzt und diesen Coefficienten gibt, zum Exponenten der Differenz der Exponenten der Dividendus und Divisors. Z. B. $a^{10} : a^{5} = a^{5}$

$a^9 : a^5 = a^4$ d. h. man darf aus dem Resultate, wenn man den Exponenten des Divisors von jenem des Dividendus abzieht, die Basis mit dem Rest d. Differenz zu dem Quotienten als Exponenten.

2. Wenn der Fall, so daß der Exponent des Divisors größer ist, als der des Dividendus, so folgendes Beyspiel Erwähnung.

Es ist $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$.

Da aber $a^m : a^m = 1$ ist, weil jede Größe sich selbst einmal enthält, so muß $a^0 = 1$ und man sagt jede Größe mit 0 Exponenten ist = 1 z. B. $100^0 = 1$ $1200^0 = 1$.

3. Dividire man z. B. a^2 durch a^5 so muß das Resultat

$$a^2 : a^5 = \frac{a.a}{a.a.a.a.a} = \frac{1}{a.a.a.} = \frac{1}{a^3}.$$

Aber $a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3}$ daher ist $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ oder

im Allgemeinen wird $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

Daher sind Potenzen mit negativen Exponenten

jenen Brüchen gleich, welche zum Zähler 1 zum Nenner

haben die Potenz mit dem positiven Exponenten.

Zusatz. $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ oder $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$.

1. Diese Bedeutung der Negativen und Nullexponenten

ist lediglich willkürlich, sie wird durch folgende

Betrachtungen gerechtfertigt.

2. Sei z. B. die gemeinste Zahl $8764,395$ durch Potenzen

von 10 auszudrücken, so schreibt man, der Reihe nach

rückwärts folgende Nullen hinzu:

$8.1000 + 7.100 + 6.10 + 4.1 + 3.0,1 + 9.0,01 + 5.0,001$ oder

$8.10^3 + 7.10^2 + 6.10^1 + 4.10^0 + 3.10^{-1} + 9.10^{-2} + 5.10^{-3}$.

Aufgaben kann man sogenannt die nächsten Brüche

und die Zweyer in Decimal, und falsche Brüche sogenannte

finden Lehrsätze lehren.

1. Division.

Buchstabengroessen durcheinander zu dividiren.

1. Wenn die Divisor und die Dividend beyde Buchstaben

mit einander gemein sind, so fällt die Division nicht

mehr über Buchstaben, sondern nur über Zahlen z. E. soll

$3a^3$ dividirt $3a$ $= 3a : 3a$ oder $\frac{3a}{3a}$ oder $3a - a^2$

mahl dividirt $3ay + 3a - m = \frac{3ay + 3a - m}{y + a - m}$

2. Lehrsatz

unbekannten Größen durch die allgemeine Glieder selbst so
folgende mannigfaltige Beziehungen der bekannten Regeln
und Lehrsätze in den Glieder der Coefficienten-Reihen selbst;
Lehrsätze und Reihen selbst, so wie Coefficienten,
welche für die einzelnen Glieder der Binomial-
reihen sich ergeben z. B. $ab : a = b$. oder $abd : b =$
$= ad$; $abd : bd = a$; $3 : 2 = \frac{2}{3}$.
Wenn aber die Binomialreihen für diese
verbundenen Glieder besteht, welche zum Theil
gleiche Lehrsätze mit den einzelnen Gliedern
Coefficienten & Exponenten selbst,
so müssen bey der Gränzen-Generalgabelich
progredient mit den Reihen Glieder der Binomialreihen
mit den 1ten Glieder der Binomialreihen der zugehörige
Glieder der Binomialreihen wechselig gegenstand stehen

gefundenen Quotienten den ganzen Divisor, subtrahirt diesen Product vom Dividenden und fährt so lange fort bis der Divisor im Dividenden selbst oder im Rest enthalten ist, der Quotient vollständig gefunden wird.

Quotient

I a / $-3a+ab-ac^2-ad$ / $=-3+b-c^2-d$.
$+3a\pm ab+ac^2+ad$

II $-3b$ / $15ab-6b^2+3b^4-12b^n$ / $=-5a+2b-b^3+4b^{n-1}$
$\pm 15ab\mp 6b^2\pm 3b^4\mp 12b^n$

III $a+b$ / $a^2+2ab+b^2$ / $=a+b$
$\pm a^2\pm ab$
$+ab+b^2$
$+ab+b^2$

IV $a+b$ / a^2-b^2 / $=a-b$
$+a^2+ab$
$-ab-b^2$
$-ab-b^2$
$+\quad+$

$$c-1 \;\Big|\; \begin{array}{l} +ac^5 \\ +ac^5-ac^4 \\ \hline +ac^4 \\ +ac^4-ac^3 \\ \hline +ac^3 \\ +ac^3-ac^2 \\ \hline +ac^2 \\ +ac^2-ac \\ \hline +ac \\ +ac-a \\ \hline +a \end{array} \;\Big/\; = +ac^4+ac^3+ac^2+ac+a$$

$c-1$

$$ac^5+ac^4+ac^3+ac^2+ac$$
$$-ac^4-ac^3-ac^2-ac-a$$
$$ac^5 \qquad\qquad -a$$

Lehre
von den
Verhältnissen und Proportionen.

Proportionen.

I.

§. 1

1. Die Verhältnisse der Vergleichung zweier Zahlen werden durch

<u>minus</u> die einen größer, als die andern ist, heißt

die arithmetische Verhältniß dieser Zahlen, die Zahlen

selbst werden die Glieder genannt und die durch diese

Subtraction entstehende Zahl heißt Differenz der

Glieder. Diese Verhältniß wird durch die Sub-

traction bestimmt und hat daher auch die Benennung der

selben —. z. L. 25 — 15 drückt die Verhältniß aus

zwischen den Zahlen 25 und 15, welche Verhältniß

Differenz ist 10.

c. Die Vergleichung zweier Zeichen wird dadurch bewirkt, daß man
zweimal die zwei gegebenen Zeichen schreibt, die Zeichen sind dasselbe
gemeinschaftliche Benennung. Die Zeichen sind dasselbe
Glieder verschiedener Quotient-Zeichen sind, wenn gemeinschaftl
der Benennung. Das Zeichen der gemeinschaftlichen
Benennung ist das der Dimension: z. B. Fuß
30: 6 der gemeinschaftliche Benennung 30, 6 heißt
der gemeinschaftl. Benennung, so ist die Benennung
5 / 15 der gemeinschaftl. 1/15.

d. Benennungen der Gleichheit sind Bruchzeichen einander
gleich, wenn Glieder gleich sind z. B. 10 — 10. 20 — 20.
15 — 15 u. s. w. 3: 2. n: n. Benennungen der
Ungleichheit sind verschiedene Glieder z. B. 20 — 9. 13—24.
20: 8, 30: 9. s. s. s. Diese letztern sind entweder zwei
Größen zum Theilen z. B. 20 — 12 oder 30: 9 oder

übungsheft S. 10 geometrisch z. B. 20.

§. 2.

Folgerungen für das arithmetische Verhältniß.

a.) Das arithmetische Verhältniß der Gleichheit ist die Differenz = 0

b. Das arithmetische Verhältniß der Ungleichheit von Größen zum Theil ist die Differenz, das Verhältniß der gemeinschaftlichen Theile ist seine Gleichheit z. B. 15 : 10 = die Differenz 5.

c. Wenn das Verhältniß zweier Größen Theil einer Größe z. B. 7 : 14, so heißen sie verhältnißtheilig 14 : Theil zu nennen, wenn das Verhältniß der Integranten zu fassen ist.

d.) Das Verhältniß der Gleichheit arithmetischer Verhältniß

wird gefunden, wenn man von der zweiten Glied zur Differenz addirt

d. i. z. B. 42 – 19 = 23 der Differenz. Hiernach Differenz + dem

2ten Glied = dem 1ten Glied z. B. 23 + 19 = 42.

c.) Das 2te Glied einer arithmetischen Progression wird gefunden

wenn man zum 1ten Glied die Differenz abzieht

z. B. 42 – 19 = 23 nachstehende 42 – 23 = 19.

Folgerungen für das geometrische Verhältniß.

a. Das geometrische Verhältniß der Gleichheit stellt sich

Exponent = 1. z. B. 20 : 20 = 1 ; 9 : 9 = 1.

b.) Das geometrische Verhältniß der Ungleichheit besteht

aus Brüchen zum Exponent

welche der kleinere ist die Exponenten

z. L 45 : 15 = 3 ; 37 : 9 = 4 1/9

c. Der gemeinschaftliche Verhältniß der Ungleichheit zwei Klassen
zum Klassen, Gattungsbegriff der Gemeinschaft nächsten Grades.

z. L. 10 : 30 = 10/30 = 1/3 ; 3 : 17 = 3/17 .

d/ Das einfache Glied mit gemeinschaftlichen Verhältniß zu mehreren
zusammengesetzten Gliedern.

z. L. Sey 36 : 9 = 4 also verhältnißmäßig 4 x 9 = 36 = dem ersten Glieds.

e/ Das 2te Glied mit mehreren zusammengesetzten Gliedern
durch den Gemeinschaft dieß dritt z. L. 36 : 9 = 4 also 36/2 = 9.

Grundlehren der arithmetischen Proportion.

a/ Die Lösung des 4ten Gliedes bey einer Proportion
Verhältniß z. L. 30 — 15 — 12 = dem 4ten Verhältniß
Klassen zweyzeitlichen Verhältnißgleichung Lösungen

haben, so nennt man sie gleiche Verhältnisse z. B. 3 : 6 = 15 : 30
und Verhältnisse 30 : 15 kann Verhältniss 22 — 7 heißt da
liegt der Unterschied 15 genannt haben. Allein 24 : 15 ist
ein zusammengesetztes Verhältniss, weil der Unterschied 9
zusammengesetzt ist.

6. Wenn 2 gleiche arithmetische Verhältnisse durch das
Gleichheitszeichen verbunden werden, so entsteht eine
arithmetische Proportion. L 15 — 30 = 7 — 22.

c) Jede arithmetische Proportion muß 4 Glieder haben
welche nun das 1te, 2te, 3te und 4te Glied genannt z. B.
15 — 9 = 10 — 4

d. Der arithmetischen Proportion muß die Summe
der beyden mittleren der Summe der beyden äußeren
gleich seyn.

c. Zur Allgemeinen Lösung dieser Aufgabe wird man den
1ten Gliede die Stufe über die 2te Glieder und
über den Differenz; den 3ten Gliedes die Summe über
4ten Glieder und den Differenz.

§. Muß sich zu jeder arithmetischen Progression der 1te Glied
so zu dem 3ten verhalten wie sich der 2te zum 4ten verhält
(§. 7) die Progression 23 — 19 = 12 — 8 und der 4te die
gemeinsame Differenz. Man kann diese Proportion auch
in (19+4) zu 19 = (8+4) zu 8.

Wenn die gemeinschaftlichen Glieder einer
gegebenen arithmetischen Progression
die Differenzen, wie der nächste Progression.

z. E. 18 — 12 = 10 — 6

11 — 9 = 7 — 5

29 — 21 = 17 — 9.

18 — 12 = 10 — 6

11 — 9 = 7 — 5

7 — 3 = 3 — 1

Zu 3 gegebenen Gliedern wie 1ter 2ter 4ter gehört allgemein

zu finden 30 — 19 = 24 — 7 = 24 + 19 — 30 = 13

Es werden also in diesem Falle die beyden mittleren

Glieder und das 4te gegeben 1te = subtrahirt. Die Diff.

ganz giebt den 4ten.

Vierter allgemeiner Regel Satz.

Wenn der suchende Glieder nächst an S. so

viele man wolle der Summe der beyden mittleren

der bekannten Reihen ab, so bleibt der suchende

mittlere Glied, so subtrahire man wieder

Summe der übrigen Glieder das gegebene immer

und die Differenz wird der Abstand der suchende

Glieder sogen.

Wenn drei Steine arithmetische Proportionale sind, und man die beyden äussern Glieder gleich sind, und die beyden mittlern Glieder, wird die mittlere arithmetische Proportionalzahl gefunden. Z. B. 8 — 12 — 16 zu nächst beschrieben 8 — 12 — 16.

Soll daher zwischen 2 gegebenen Zahlen die mittlere arithmetische Proportionalzahl gefunden werden, so addire man sie und halbire die Summe.

Grundlehren der geometrischen Proportion.

§. 1.

Von Linien sind einige gerade Linien, welche gleich sind, wenn sie gleich grosse Räume ihrer Glieder, sondern

[illegible] Gräben der Gemeinde 6. 5 fl. 3 kr.
der Stadt 2 fl. 8 der Gemeinde 3 fl. 7 der Stadt
= der Gemeinde 3 fl.
Hecken 2 graumarkische Ruthen breit gemeine Gemeinde
Sommerdeiche 2 gleiche graumarkische Ruthen 27 fl. 9 = der
Ruthen 30 fl. 10 kr. der 3 der Gemeinde 3 Sgl.
6 Thore 2 gleiche graumarkische Ruthen durch
das Dreieck der Gleichheit verbunden sind, 3 Sgl.
mit graumarkischer Progression 3 L. 48 fl. 6 = 24 fl. 3
sind 8 der Gemeinde überall 8. Die Hecken
Lemmingen der Gemeinde fast diese Progression
mit dreimarkischen gemein
c. Landgraumarkische Progression fast folgende
Hauptsätze: Das Produkt und der
Hypotenuse aus dem Quadrate der Produkte

und Innere und Aeußere heißen z. B. 3 : 15 = 7 : 35 .. 3 × 35 = 7 × 15.

Der Grund davon ist folgender:

Man setze $3 = 15 \frac{3}{15}$ und $7 = 35 \frac{7}{35}$.

Da aber $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ und $\frac{7}{35} = \frac{1}{5}$ ist, so wird $3 = 15 \frac{1}{5}$ und $7 = 35 \frac{1}{5}$ =

und da die Proportion ist folgende: $15 \frac{1}{5} : 15 = 35 \frac{1}{5} : 35 =$

3 : 15 = 7 : 35, bildet man nun das Produkt der äußern

Glieder und nimmt, so ist $(15 \frac{1}{5}) \times 15 = (35 \frac{1}{5}) \times 35$, da hier das

Produkt aus gleichen Faktoren besteht.

d.) Den Allgemeinen Satz auf folgende Art

beweisen wollen:

Da die ersten Glieder einer geometrischen Proportion

mit Produkt aus dem 2ten Gliede mit dem Exponenten,

mit dem 3ten Gliede eben einen Produkt aus dem 4ten Glie-

den dieser Exponenten ist, so besteht das Produkt

und 3 stan und 5 stan Glieds, und dann sechstanne; 2 tan
Glied, Cyanuret und 4 tel Glied; der Fraudulenten
mittlern Glieder nicht als andern sechstanne;
4 tel Glied Cyanuret und 2 tel Glied, welche Principien
sind. Hieraus lässt sich die folgende Lehre
ableiten:

Aus der Proportion 3 : 15 = 7 : 35 geht hervor, dass die Brüche
$\frac{3}{15}$ und $\frac{7}{35}$ gleichen Werth haben. Bringt man diese
Brüche auf gemeinschaftlichen Nenner, so ist $\frac{3}{15} \times \frac{7}{35} = \frac{105}{525} \times \frac{105}{525}$
oder $\frac{3 \times 35}{15 \times 35} = \frac{7 \times 15}{35 \times 15}$ folglich auch $3 \times 15 = 7 \times 15$ die
Zähler gleicher Brüche mit gleichen Nennern
gleiche Zähler haben.

§. 2.

Wenn mehrere Glieder mit gemeinschaftlichen
Verhältnis-Exponenten mit einander multiplizirt

und Dividend, so bleibt der Quotient unverändert z. B. 18 : 6
der gegebenen Verhältniß der Quotient = 3 somit 3/18 x mal 6:
6 x 1 = 3 also $\frac{18}{2} : \frac{6}{2} = 3$.

Zu jeder geometrischen Progression muß allemal sich das 1te Glied zum 2ten, wie sich das 2te zum 3ten verhalten

c. Zu jeder geometrischen Verhältniß die Endglieder mit gemeinen Theilen, zeigt Algebra, wie man den kleinsten der Theilzahlen mit einander haben und die Verkleinerung der Glieder eines Verhältniß &c.

Man kann sagen das 1te und 2te = wie 1te und 3te = wie 2te und 4te = und das 3te und 4te = Glied mit derselben Zahl sagen, wenn die Progression fortdauert; daß wir setzen auch die ganzen Glieder in das verhältnißmäßige Zeichen als Exponenten von 1ten und 2ten u. 3ten, welche die kleinsten verhältnißmäßige genannt werden.

d. Hinreichend heißt das Verhältniß wie in dem vorgenannten
befindlichen Beispiele die einzelnen Zahlen zu nennen
nun die Proportionen zu stören. Man darf nun nicht
denn wegzulassen Stamm dieses Beispiels eingent
nüssen weil beim Beispiel Glieder mehrfach vorkommen
man immer unter 2 und die Rechnung setzt.

Es sei die Proportion $\frac{2}{3} : 6 = 8 : 72$

$$2 : 6 \times 3 = 8 : 72$$

$$2 : 18 = 8 : 72$$

$$2 : 6 = 8 \times 3 : 72 = 2 : 6 = 24 : 72.$$

Wenn 2 verschiedene Proportionen gegeben sind und man will alle
gehörigen Glieder alle aus den
Glieder der mittleren Verhältnisse alle 2 den und 3 den
und 3 den, so bilden man diese Verhältnisse wieder

reis einer Proportion, welche man zusammengesetzt nennt
wird, wenn das Product der Producte der Glieder
der gegebenen Proportionen gleich ist d. z. L.

18 : 3 = 54 : 9

8 : 4 = 10 : 5 so ist auch

144 : 12 = 540 : 45.

Auf gleiche Weise können mehrere Proportionen
gegeben sein, um sie in eine einzige zusammenzusetzen.
Wenn 2 Proportionen gegeben sind, so bildet man
die Quotienten derjenigen Glieder
welche einerlei Benennung haben, so heißt auch
jene einfache Proportion der Theil.

§. 3.

Wenn in einer geometrischen Proportion

Jedes Produkt aus einem Glied einer Proportion, multiplicirt mit einem solchen Produkt aus dem Quadrat dieses Gliedes und einem zweiten, somit das Produkt aus dem vierten Gliede dann Quadrate des zweiten Gliedes gleich.

Zu finden zwei mittlere Proportionen, wenn die Summe der 1ten und 2ten Glieder, so wie auch der 1ten und 2ten, wie auch die Summe der Differenz der 3ten und 4ten Glieder zu der 3ten und 4ten wie 4 fällt.

Wenn folgende 3 Proportionen vorgegeben sind

15 : 3 = 84 : x

12 : 4 = x : y

26 : 2 = y : z wenn die Buchstaben x, y, z Zahlen

welche noch zu berechnen sind, so wird der Flächeninhalt zu

suchen gefunden, der Buchstabe die zugehörige Größe

mit einander multiplizirt, wodurch nachfolgende zusammen-

gesetzte Formeln entstehen.

$$15 \times 12 \times 26 : 6 \times 6 \times 2 = 84 \times x \times y : x \times y \times z =$$

$$4680 : 24 = 84 \times x \times y : x \cdot y. \text{ Indem im}$$

Zähler Buchstaben $x \times y$ mit jedem Gliede abgekürzet

$$\text{gibt: } 4680 : 24 = 84 : z$$

$$z = \frac{24 \times 84}{4680} = \frac{2016}{4680} = 0,4307.$$

Lehre

von der

Ausziehung

der

Quadrat-Wurzel.

1821

Quadrat. Wurzel.

§. 1.

Eine Zahl mit sich selbst, d. multiplizirt gibt die 2te Potenz derselben, welche man mit einem besonderen Namen das Quadrat, die mit sich selbst, d. multiplizirte Zahl aber die Quadrat. Wurzel nennt. z. B. 8×8 = 64

64 = Quadrat. 8

8 = Die Quadrat. Wurzel

Zu einer gegebenen Zahl die Quadrat. Wurzel zu ziehen heißt suchen, welche mit sich selbst, d. multiplizirt die gegebene Zahl zum Produkte hat.

Das Zeichen für die Ausziehung der Quadrat Wurzel ist √.

Man nennt eine gegebene Wurzel nicht selbige, wenn sie
nur eine, nicht selbige, in sich fasset.

§. 2

Wenn eine Wurzel aus 2 Theilen bestehet und man es
selbige zum Quadrate, so besteht dasselbe

a.) Aus dem Quadrate des 1ten Theils

b.) Aus dem doppelten Produkte des 1ten und 2ten Theils

c.) Aus dem Quadrate des 2ten Theils

z. E. a+b drücke die gegebene Wurzel aus a sey
dann sey b der 2te Theil derselben, so begreifet

sich $\frac{a+b}{a+b}$

a^2+ab

$+ab+b^2$

$a^2+2ab+b^2$

a^2 3600

$2ab$ = 480

b^2 = 16

60+4

60+4

3600+240

+240+16

3600+480+16

4096

§. 3.

Erg. 2. Ziehen wir Wurzel aus das Quadrat der 1ten Zahl
das Quadrat aus der Zahlenbenennung, so kommen wir auf
keinen runden Teilen.

Da diese aus Teilen der Grundzahlen keine
das Quadrat aus 9 oder 810 ist, so kann das Quadrat
der ersten Teilbeispiele nur die 1000 nicht danken.
Das Doppelte Produkt dieser Produkt zusammen
Zahlenbenennung Einheit Ausdruck Teilen
einen runden Teilen in der Zahlen haben.
Das Quadrat des 2ten Teilbeispiels einen runden Teile
einen Einheiten haben und nicht danken die
Zahlenbenennung das Quadrat der größeren Einheit
$9 = 9 \times 9 = 81$ ist.
1. Man Teile die angegebenen Zahlen der Größe nach

wenn der Rechnung und Linkmann Klassen und so
nachstehen 2 Klassen und die Hälfte Wurzel
Stelle.

2.) Man schreibe nun einmal die vorgesetzte
Quadrat, welches man darstellen Klasse abzuziehen
wenden kann, ziehe es wirklich davon ab und setze seine
Quadrat Wurzel als 1ten Wurzelteil zur Rechten der
gegebenen Zahlen und nehme seine Abstandsstelle.

3. Man (ein zwei) die Rest bleibt, schneide diese drei,
wenn der Doppelte Standort in diese Klassenabstandes
Rest. Setze wenn dergleichen drei Stellen diesen Rest die folgende
Zahlen der Zahl, so muß Findung erhalten sein Rest
stehen der Doppelte Standort wenn der Teil in der
2ten wirklich sein.

4. Man zerlege man den letzten Wurzelteil und den vorletzten
den letzten in zusammengesetzten Zahl, somit der Quotient der
2ten Wurzelteil geben, dann wende man mit 2. Ziffer
2 ab Verdopplt, somit 6 zum Quotienten und setze
diesen 2ten Wurzelteil multiplizire man mit dem diesen
nächsten der Produkt von Dividenden ab.

5. Falls man den allerletzten Rest in
nicht der Ziffern der Zahl, so muß in dem nächsten
nächst, der Quadrat ab 2ten Teilen Wurzel gezogen.
Wenn man diese 2ten Teilen Quadrate,
somit diese nicht in der Zahl, so ist
ab übrigzugenommen die voll ab ist größere
kleinen als diesellen.
Wenn nun voll ist die übrigzugenommen Zahl ein
vollkommen Quadrat.

6.) Im 2ten Falle aber müssen wir den gefundenen Quotienten wieder um eine Einheit vermindern und mit dem vermin-derten mit Nro 4 und 5 beginnend Stufenweise so lange bis das Quadrat des 2ten Theils, die mit Nro. 5 beginnend gefundenen Zahlen abgezogen werden kann.

Im 3ten Falle zieht dieser, das 3te gefundene Wurzelglied, dann das Quadrat desselben von allen vorhergehenden Theilen und dem zu-gebliebenen Rest ab, und setzt zu dem Rest, so muß die ursprünglich gegebene Zahl als Residuum herauskommen.

Beispiele.

Es soll aus der Zahl 784 die Wurzel gezogen werden.

$\sqrt{784} = 28.$ $\qquad a^2 + 2ab + b^2$

4

38

(4)

32

64

64

II $\sqrt{7225} = 85.$

$a^2 = 64$

82

$2a\,(16)$

$2ab\ 80$

25

$b^2 = 25$

85

425

680

7225

Probe.

III. $\sqrt{1444} = 38.$

$a^2\ 9$

54

$2a\,(6)$

$2ab\ 48$

64

$b^2 = 64$

9

304

144

1444

Probe.

Fertig.

Bestimmung der Theile der Quadrat-Zahlen mehrziffriger Wurzel.

Das Quadrat einer 3 stelligen Wurzel enthält 5 Stellen.

1. Das Quadrat der ersten Stelle
2. Das doppelte Produkt aus der ersten Stelle in die zweite
3. Das Quadrat der 2ten Stelle
4. Das doppelte Produkt aus der Summe der 1ten und 2ten in die 3te
5. Das Quadrat der 3ten Stelle.

Das Quadrat einer vierstelligen Wurzel besteht aus folgenden 7 Theilen:

1. Aus dem Quadrate der ersten Stelle
2. Aus dem doppelten Produkte der 1ten in die 2te Stelle
3. Aus dem Quadrate der 2ten Stelle

4. Aus dem doppelten Produkte zusammen die Summe der ersten und 2ten Spalte in der 3ten

5 Aus dem Quadrate der 3ten Spalte.

6. Aus dem doppelten Produkte von der Summe der ersten, zweiten, und Dritten Spalte in die 4te

7. Aus dem Quadrate der 4ten Spalte.

Letztens addirt man die beiden ersten Summen der Stammspalte der Quadrate zu 2 und 4 stelligen Quadrate Wurzeln, und bekommt für jede Wurzel 2 Summen, und eine 7 Spalte 2 Stücke zum Quadrate kamen.

Endlich nimmt das doppelte Produkt aus beiden Summen mahl genommen mit der 7ten Spalte.

Hiedurch hat man die 4 Spalten dieser Stelle der Quadrat Zahlen allenfalls zugehörigen Wurzel heraus zu bringen.

Bestimmung
der
Wurzel aus Theile aus vielziffrigen Zahlen.

1. Um denjenigen Theil der gesuchten Wurzel zu bestimmen, welcher der Stelle der höchsten gegeben Ziffer entspricht, theilt man die Zahl in Klassen, welche mit der Einheit der Stelle, wo die Wurzel bestimmt ist, beginnen, die Zahl in Klassen, welche mit der Einheit der Wurzelstelle beginnt, oder Einklassen bey Bestimmung der Wurzel.

2. Man bestimmt diejenige nächste Quadratzahl der Einerklasse, welche nicht größer ist, als diese Klasse, sodann diejenige Zahl, deren Quadrat

3. Man nimmt von den übrigbleibenden Ziffern die folgende Ziffer des Bruchs und dividirt mit dem doppelten von der Anzahl Ziffern in dieser Gruppe, so ist der Quotient der 2te Anzahlstrich. Man multiplizirt nun mit dem doppelten den Divisor, zieht das Produkt von dem dividendus ab, und bringt die folgende Ziffer des Bruchs neben das Quadrat der 2ten Stelle der Anzahl, zieht man diesen Gruppen ab, so ist der Rest der Abzug gehörig, kommt 2 der Anzahlstrich der nächsten Gruppe. Kann dieses aber nicht geschehen, so muß der Anzahlstrich der Gruppe um eins vermindert werden.

4. Nach so diesen übrigbleibenden Rest, die nächste Ziffer des Bruchs, so entsteht eine Gruppe des doppelten Produkts der 1ten und 2ten Stelle in der 3ten.

Wünderlich mann mit dem Zuzahlen der Ehrenzeichen der Bürgerlichen Schützen-
Gilde in diesen Grenzen, so gibt die Quotient der Zahl 3 nach Theil der
Münzen, welche man mit dem Einsetzen bezeichnen
diese Schwierigkeit wird die Zahl abzuziehen.

2) Zu dem bleibenden Rest man nun die folgenden Ziffern
der Zahl und zieht von diesen Grenzen das Hundert der
3 und Theil ab, wenn sie dann angibt, ob der Münzen Theil einer
weder zu groß zu sein, dann wenden wir mehr letzteren
Falle letzteren Münzen Theil nun dann wenden müßen.

3) Zu dem in Hyperbel bleibenden Rest kommt wieder die
folgende Ziffer das Hundert Einsetzen zu
3 u. s. w. Grenzen Regeln fort, die übrigen
Münzen Theil zu suchen wenden die nun folgenden diesem
jedesmal die Zuzahlen Hundert wieder der Summe

allen Quadratzahlen dreier aufeinanderfolgender Würzelzahlen genommenen Unterschied Abzüge der Quadrat der letzten Würzelzahl beträgt, so ist dieses, daß die gegebene Zahl die größte sey, deren Quadrat das gefundene sey.

Beyspiele.

$$a^2 + 2ab + b^2$$

73 | 14 | 49 = 85 7
$a^2 = 64$
9 4
$2a$ (16)
$2ab$ 80
14 4
$b^2 = 25$
1 9 4
$2(a+b)$ (170)
$2(a+b).c$ 1 9 0
4 9
$c^2 =$ 4 9

28 | 14 | 64 | 84 = 5 3 2 9 d
$a^2 = 25$
3 4
$2a = (10)$
$2ab$ 30
4 4
$b^2 =$ 9
3 5 8
$2(a+b$ (106)
$2(a+b).c$ 2 5 2
1 4 6 4
$c^2 =$ 4
1 4 6 0 8
$2(a+b+c) =$ (1064)
$2(a+b+c).d$ 9 5 7 6
$d^2 =$ 5 0 3 2 4
8 1
5 0 2 4 3 mal 3 ist

Ausziehung

der

Quadrat-Wurzeln durch

Annäherung.

§. 1.

Entstehung und Begriff der Irrationalzahlen.

Wenn man sich die natürlichen Zahlen

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81. 100. und unsere

zwischen 2 unmittelbar aufeinander folgenden Quad-

raten mitten mittelbare Zahl. z. B. zwischen 4 u. 9.

die Zahl 5. zwischen 9 u. 16 die Zahl 12. Wie ist es mit Wurzeln

68?

Die 58 + 49. 4gahes Klammeral 64 u. s. w. somit 58 zweifache als Zähler 8 fache als Nenner mit gleichen Zeichen zu versehen sind.

Man setzt nun 10 vollkommene Quadrate, nämlich die übrigen 90 Zahlen unvollkommene Quadrate sind, deren Quadrat-Wurzeln Irrationalzahlen sein müssen.

§. 2.

Die Quadrat-Wurzel unvollständiger Quadrate durch Annäherung zu finden.

Die innere Zahl Bedeutung eines Quadrates ist, daß Zähler und Nenner quadrat-zahlen sind, somit muß man die Quadrat-Wurzel des Zählers durch die Quadrat-Wurzel des Nenners dividiren, z. B. $\sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{100}} = \frac{7}{10}$.

$\sqrt{\frac{11}{25}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{25}}$ in diesem Falle ist somit Zähler als Nenner eine Irrationalzahl.

Soll nun z. B. Wurzel aus 5 gefunden werden, so setzen wir $\sqrt{5} = \sqrt{\frac{500}{100}} = \frac{\sqrt{500}}{10}$.

Finden wir also von 500 die ganzzahlige Wurzel, so müssen sie mit 10 dividirt werden, und wir haben $\sqrt{5}$ einstweilen in Ganzen, finden wir sie $\frac{1}{10}$ u. $\frac{1}{100}$ so finden.

Hierauf folgt die allgemeine Regel:

Um irgend einen ungeradzahligen Quadrate die Wurzel durch Annäherung zu finden, zerlegen wir die Zahl so viele Quadrate als möglich, oder wenn wir eine Decimalbruch Stelle finden Wurzel gefunden werden soll und suchen dann

zweifache Weise.

Beispiele.

Die Wurzel aus 8 ist auf 4 Decimal-Stellen zu suchen.

$a^2+2ab+b^2$.

$a^2 = 4$ | 8,00 00 00 00 = 2,8284

40

2a (4)

2ab 32

80

$b^2 = 64$

160

2(a+b) 56

2(a+b).c 112

480

$c^2 = 4$

4 160

2(a+b+c) 564

2(a+b+c).d 4512

2480

$d^2 = 64$

24160

(5656)

22624

15360

$e^2 = 16$

153616 Rest.

2

113136

226272

56568

226272

56568

79998456

15344

8,00000000

Probe.

Die Münzsorten 12 7 sucht dezimal, stellen zu suchen.

$a^2 + 2ab + b^2$

12.150.000.000.000 - 11.2.69 4
11269 4

2
2a 2 7
- 7

6^2 1
60

2(a+b) (22)
2(a+b).c 44
c^2 160
4
1560

2(a+b+c) (224)
2(a+b+c).d 1344
d^2 2160
36
21240

2(a+b+c+d) (2257)
2(a+b+c+d).e 20268
e^2 9720.
81
96390

2(a+b+c+d+e) (22538)
2(a+b+c+d+e).f 901552
f^2 = 62380
16
623764 rel. Min. St.

Jacobs

Quadrat-Wurzeln aus gemeinen Brüchen.

Soll aus einem gemischten Bruche die Quadrat-Wurzel gezogen werden, so verfahre man nach folgenden allgemeinen Regeln:

Man ziehe die Wurzel sowohl aus dem Zähler als auch aus dem Nenner des Bruches z. B. $\sqrt{\frac{7}{12}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{2.64}}{\sqrt{3.464}}$

Da jedoch die Wurzel aus einer Zahl selten genau bestimmt ist, so kann man dieselbe beim Ausziehen der Quadrat-Wurzeln auf gewisse Decimalen, der Genauigkeit wegen, berechnen. Zähler und Nenner des gegebenen Bruches mit solchen Nullen ergänzt, bis die Wurzel des Nenners ganz ausgezogen ist, wodurch der Werth des Bruches nicht geändert

bleibt, sein Nenner aber ein vollkommenes Quadrat
nicht mehr enthält.

Beisp. 2. $\sqrt{\frac{7}{11}} = \sqrt{\frac{7 \times 11}{11 \times 11}} = \sqrt{\frac{77}{121}} = \frac{\sqrt{77}}{\sqrt{121}} = \frac{\sqrt{77}}{11} =$

$= \frac{8,77}{11}$

Genauer $\sqrt{\frac{8}{13}} = \sqrt{\frac{8 \times 13}{13 \times 13}} = \frac{\sqrt{104}}{13} = \frac{10,198}{13}$;

man kann auch den Zähler des Bruches dadurch zu einem
vollkommenen Quadrate bilden, daß man Zähler und
Nenner desselben mit dem Zähler multiplizirt wird.

Um auch Irrationalbrüche die Quadrat-Wurzel zu ziehen
ist es nur nöthig beyde Zahlen unter Einem Wurzelzeichen
Irrationalbruch, somit bis zu ihrem Produkte multiplizirt die Radix
des Zählers und Nenners ist. Klassen Irrationalbrüche
müssen die Zahl ihrer Irrationalbrüche selbst einen
Grad steigen.

Um aus diesen Dezimalbrüchen, deren Quadratwurzel
man finden soll, ungerade Zahlen von Stellen wegzuschaffen, muß deren
Stellenzahl vermehrt, d. i. nöthigen Falls durch
möglichst wenig. z. B.

$$\sqrt{0,55225} = \sqrt{\frac{55225}{100000}} = \sqrt{\frac{5522500}{10000000}} = \frac{2350}{1000} = 0,235.$$

$$\sqrt{0,027225} = \sqrt{\frac{27225}{100000}} = \sqrt{\frac{2722500}{10000000}} = \frac{1650}{1000} = 0,165.$$

Hierauf beruht das Verfahren, aus gemeinen Brüchen
durch die Quadratwurzel zu finden, wenn man sie in
Dezimalbrüche verwandelt, und durch diese die Quadrat-
Wurzel sucht.

Zu wirklichen Dezimalbrüchen Stellen anhängen, die

Reziprokbrüche, welche einander zugeordnet sind, heißen
Zugeordnete.

Die Summe zweier zugeordneter Zahlen nennt man die Tangentensumme,
zugehörige Tangentenzahl. Die Differenz dieser beiden zu-
gehörigen Zahlen nennt man die Tangentendifferenz,
zugehörige Tangentenzahl bezeichnet wird.

Bsp. 2. Zwischen 8 und 29 die mittlere geometrische
Proportionalzahl gefunden werden, so ist

$8 : x = x : 29$ folglich $x \times x = x^2 = 8 \times 29 = 232$

$x = \sqrt{232}$

$x = 15,23.$

$17 : x = x : 38$

$x^2 = 17 \times 38 = 646$

$x = \sqrt{646} = 25,416.$

Lehre

von der

Ausziehung

der

CUBIC=WURZEL.

Cubic„ Wurzel.

§. 1.

Wie man eine Zahl zweimal mit sich selbst multiplizirt, wodurch sie dann zum Quadrat erhoben wird, so heißt diese Handlung die 3te Potenz oder der Würfel oder Cubus; welche man eine Potenz über dieser Würfel die Würzel der 3ten Potenz oder die Cubic„Würzel nennt. z. B. 4×4×4 = 64= dem Würfel von 4. 4 = der Cubic„Würzel aus 64.

Will man umgekehrt diese die Cubic„Würzel wissen, so sucht man jene Zahl, welche zweimal mit sich selbst multiplizirt diese Zahl gibt, oder sucht die Cubic„Würzel, die Würzel der 3ten Potenz ist, so setzt man vor sie das Würzelzeichen, die Ziffer 3 in die Öffnung des Würzelzeichens. z. B. $\sqrt[3]{64}$. $\sqrt[3]{9430}$.

§. 2.

Bestandtheile des Würfels zweiziffriger Wurzel.

Wenn man in einem zweitheiligen Binom den Cubus
ausgelöst, so enthält dieser folgende 4 Stücke:

1. den Cubus des ersten Theils
2. das 3fache Product des Quadrats des ersten Theils
in den zweiten
3. das 3fache Product aus dem ersten Theile in das
Quadrat des 2ten.
4. den Cubus des 2ten Theils.

Diese Zerfällung wird durch Einführung des Binomi
zweitheiligen Wurzel a + b 2mal mit sich selbst multiplicirt
und
sind.

$$
\begin{array}{l}
a+b \\
a+b \\
\hline
a^2+ab \\
\quad +ab+b^2 \\
\hline
a^2+2ab+b^2 \\
a+b \\
\hline
a^3+2a^2b+ab^2 \\
\quad +a^2b+2ab^2+b^3 \\
\hline
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
\end{array}
$$

Zur Erklärung in Zahlen dienen Klassenzahlen;
die gegebene Münzzahl sey $58 = 50+8$

$a^3 = 125000$

$3a^2b = 60000$

$3ab^2 = 9600$

$b^3 = 512$

Demnach $195112 =$ dem Cubus von 58 gegen.
Man kann daher den Cubus jeder 2ziffrigen Zahl durch
diese Formel aus seinen 4 Decimalstellen zusammen-
setzen.

Zahl. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Quad. 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81.

Cubus. 1. 8. 27. 64. 125. 216. 343. 512. 729.

Um die Cubic. Wurzel aus 4. 5 oder 6 ziffrigen

Zahlen zu finden, suchen sie nach der Vorschrift

zu verfahren

1. Man theilt die gegebene Zahl von der Rechten gegen

Linken in Klassen, das 3 die nächste Klasse zu setzen

weiß

2. Man zieht die größte Cubic. Zahl, welche unter der

linken Klasse abgezogen werden kann, wählet sodann

selbe ab, so ist seine Cubic. Wurzel die Zahl der Anzahl

3. Die doppelte Zahl 2a² 6 mit der Hunderter multiplizirt.

so setzt man die Hunderter der gegebenen Zahl unter

dann in 2 gesonderten Reihen, somit 3 Zahlen Ganze der Handzahl
3 a² b entstehen.

4. Nun die Summe der Zahlen mit denen 3 Zahlen Paare der ersten
Mängelzeile: 3 a² sind die man subtrahiert, somit 3 Zahlen Reihe,
Spaltet der 2te Teil der Mängel sein, da 3a² b durch 3a²
dividiert zum Quotienten b gibt.

5. Man bildet nunmehr das Handzahl 3a² b ein Zahlen
zeichen ab und setzt unter den Strich die folgende
Ziffer der gegebenen Reihe, somit die in diesem Ganzen der
Handzahl 3 a b² entstehen sein.

6. Man ziehen der letzten diese 3 a b² ein Zahlen zeichen ab
und setzt unter den Strich die folgende Ziffer der Reihe,
somit die in diesem Ganzen der Subtrahend entstehen
sein. Dann bildet man ein Zahlen zeichen gesondert

es würde sich nun darum handeln, eine Regel für die Entwicklung
der vollkommenen Cubus, deren Wurzel
gefunden werden soll.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$\sqrt[3]{6859} = 19$ { V. Wurzel

$a^3 =$	1	1	
	58	9	
$3a^2 =$	(3)	1	
		19	
$3a^2b =$	27	361	= Quadrat
	315	19	
$3ab^2 =$	243	3249	
	729	361	
$b^3 =$	729	6859	= Cubus

Cube

$\sqrt[3]{50653} = 37$ Wurzel

$a^3 =$	27	37	
	323	3	
$3a^2 =$	(27)	351	
		111	
$3a^2b =$	243	1521	= Quadrat
	801	39	
$3ab^2 =$	729	13689	
	729	45639	
$b^3 =$	729	50653	= Cubus

Cube

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$\sqrt[3]{19683} = 27$

$a^3 = 8$

15

$3a^2 = (12)$

$3a^2b = 54$

110

$3ab^2 = 108$

27

$b^3 = 27$

$\sqrt[3]{941192} = 98$

$a^3 = 729$

212

$3a^2 = (243)$

$3a^2b = 1944$

1772

$3ab^2 = 1728$

512

$b^3 = 512$

$\sqrt[3]{857375} = 95$ Cubic

$a^3 = 729$

1455

$3a^2 = (243)$

$3a^2b = 1215$

2382

$3ab^2 = 675$

1707

$b^3 = 125$

1695 Solid Inch

729

475

855

9025 = Quadrat

95

45125

81225

857375

16954 Solid Inch

874329

Der Cubus einer ganzen positiven Wurzel besteht
folgenden 7 Punkten

1. Aus dem Cubus der ersten Zahl
2. Aus dem 3fachen Producte aus dem Quadrate der 1ten Zahl in die 2te Zahl
3. Aus dem 3fachen Producte aus der 1ten in das Quadrat der 2ten
4. Aus dem Cubus der 2ten Zahl
5. Aus dem 3fachen Producte aus dem Quadrate der Summe der 1ten und 2ten Zahl in die 3te.
6. Aus dem 3fachen Producte aus der Summe der 1ten und 2ten Zahl und dem Quadrate der 3ten.
7. Aus dem Cubus der 3ten Zahl.

Wenn man demnach in Ziffern eine 3 stellige Cubic Wurzel dieser 7 Punkte gemäß bildet

zusammen der 3. Potenz des ersten Theils dreimal das Quadrat des ersten Theils mit dem zweiten, dreimal das Quadrat des zweiten Theils mit dem ersten, und endlich die 3. Potenz des zweiten Theils.

Bestimmung der Wurzelzahl aus vielziffrigen Zahlen.

Um die Kubikwurzel aus einer gegebenen Zahl zu finden, zerlege man dieselbe zuerst in Klassen, wie bei der Bestimmung der Kubikwurzel ganzer Zahlen.

Beispiel.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$\sqrt[3]{41\,781\,923} = 347$

$a = 300$ — $a^3 = 27$ — 14

$3a^2 = 270$ — $3a^2b = 108$ — 1041

$3ab^2 = 3948$ — 120409

$b^3 = 343$ — 25441

$3(a+b)^2 = 34068$ — 847863

$3(a+b)^2 \cdot c = 24276$ — 481636

$3(a+b) \cdot c^2 = 4998$ — 361227

$c^3 = 343$ — 41781923.

Probe

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\sqrt[3]{1\,48\,53\,58\,9} = 526$

$a^2 = 125$

$2a = 205$

$3a^2 = (75)$

$3a^2b = 150$

553

$3ab^2 = 60$

4931

$b^3 = 8$

149235

$3(a+b)^2 = (8112)$

$3(a+b)^2 \cdot c = 48672$

5638

$3(a+b) \cdot c^2 = 5616$

229

$c^3 = 216$

$13\,816\,289$

526

31556

10512

2630

$276676 = \text{Quadrat}$

526

1660056

138338

$145531576 = \text{Cubus}$

$13 = \text{Rad}$

$145531589.$

Probe

$\sqrt[3]{1\,48\,19\,85\,71} = 5291.$

$a^3 = 125$

$3a^2 = 231$

$3a^2b = 150$

811

$3ab^2 = 60$

7519

$b^3 = 8$

75118

$3(a+b)^2 = (8112)$

$3(a+b)^2 \cdot c = 73008$

21105

$3(a+b) \cdot c^2 = 12636$

$c^3 = 8669$

729

$3(a+b+c)^2 = 839681$

$3(a+b+c)^2 \cdot c = 839513$

$3(a+b+c) \cdot d^2 = 1587$

1587

$d^3 = 1$

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$\sqrt[3]{5389750958437}$ = 17533

43 | 1
43
$3a^2$ = (3)
$3a^2b$ 21
228
$3ab^2$ 144
819
b^3 343
4769
$3(a+b)^2$ = (867)
$3(a+b)^2.c$ 4335
4348
$3(a+b).c^2$ 1275
30733
c^3 = 125
306088
$3(a+b+c)^2$ (91875)
$3(a+b+c)^2.d$ 75625
304637
$3(a+b+c).d^2$ = 54257
d^3 2999120
27
2999093
$3(a+b+c+d)^2$.18 (9219027)
$3(a+b+c+d).e$ 2765708 1
233384498
$3(a+b+c+d).e^2$ 4333
e^3 = 232911671
27
232911644 wie Probe.

25599
5 25599
8 25599
12 25599
17533

307406089
17533

5389750958437
232911644 wie Probe.

5389750958437
232911644
5389983870081

Probe.

5389750958437
232911644.
5389983870081.

Irrationalzahlen durch Ausziehung der Cubic. Wurzeln.

Man kann sich diese Operation folgendermaßen
deutlich vorstellen.

1. 2. 3. 4. 5 6. 7. 8 9.

1. 8. 27. 64. 125. 216. 343. 512. 729. und

zwischen zwei nacheinanderfolgenden Cubis z. B. zwischen
27 und 64 befindet sich 58 mahl und die Frage stellt: Was
ist $\sqrt[3]{58}$? so verhalten, daß diese Cubic. Wurzel zwischen
3 und 4 liegen muß; so ist sie genau zu bestimmen, so oft sie
3 und Bruch dieses Bruches.

Es finden sich also unter den Zahlen von 1 — 729

Ein Bruch, dessen Nenner vollkommene Cubikzahlen sind, dessen Zähler aber keine solche sind, heißt ein Cubikwurzel-Bruch.

Man muß daher die Cubikwurzel aus irrationalen Cubikzahlen ausziehen können, wenn man, daß sie durch Annäherung gefunden werden, sich begnügen will.

Es ist leicht einzusehen, daß die Cubikwurzel aus irrationalen Brüchen ebenfalls durch Annäherung gefunden werden muß, daß dieselben ebenfalls für den Zähler und Nenner gesucht werden.

$\sqrt[3]{\frac{64}{729}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{4}{9}$ ferner $\sqrt[3]{\frac{1000}{1728}} = \frac{\sqrt[3]{1000}}{\sqrt[3]{1728}} = \frac{10}{12}$

$\sqrt[3]{\frac{136}{379}} = \frac{\sqrt[3]{136}}{\sqrt[3]{379}}$ ist ferner zu suchen als Irrationalzahl i. d.

Um aus einer ganzen, gegebenen Zahl die Cubik-
Wurzel durch Annäherung zu finden, subtrahire so
viele Cuben als möglich, zuerst die Cuben der Zehner, dann
allenfalls wie viel Cubikzahlen der Einer in der Cubik-
Wurzel enthalten soll.

Erläuternde Beispiele.

1) soll die Cubik-Wurzel aus 2 Billionen
gefunden werden.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$\sqrt[3]{2\,000\,000\,000} = 2,66$

8

a^3 8

$3a^2$ (12)

$3a^2b$ 72

$3ab^2$ 360

216

b^3 676

216

14240

$3(a+b)^2$ (2028)

$3(a+b)^2 \cdot c$ 12168

$3(a+b) \cdot c^2$ 2028

c^3 216

17890

266

1596

1596

532

7056

266

42336

42336

14112

18821096

17896

1000000000

Ende.

Aus 3g soll die Cubic. Wurzel bis auf 3 Decimalstellen gefunden werden.

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\sqrt[3]{3g000000000} = 3391.$

$6^3 = 27$

$3a^2 = 120$ (27)

$3a^2b = 84$ (3)

$3ab^2 = 390$

$6^3 = 84$

$3(a+b)^2 = 3090$

$3(a+b)\cdot c = 29403$ (3267)

$c^2 = 22770$

$3(a+b+c)\cdot c = 42570$

$3(a+b+c)^2 \cdot d = 417810$ (729)

$d^3 = 344763$

$3(a+b+c)^2 \cdot d^2 = 73047900$ (10173)

729453600

1149888100

1149888100

1034899290

34496643

34496643

3899280543729

3000000000

289476357

289476357 Rest

Cubic" Wurzel aus gemeinen und Dezimalbrüchen zu ziehen.

Die Seite zu suchen, die Regel bey Berechnung der Lübeck. Münzgebäude genannt.

Man zieht zuerst aus dem Zähler und dem Nenner die Lübeck" Münzgebäude und dann aus dem durch Division gefundenen Quotienten die Z. L.

$$\sqrt[3]{\frac{11}{20}} = \frac{\sqrt[3]{11}}{\sqrt[3]{20}} = \frac{2,2}{2,7}$$

$$\sqrt[3]{\frac{54}{60}} = \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{60}} = \frac{3,7}{3,9}$$

$$\sqrt[3]{\frac{146}{121}} = \frac{\sqrt[3]{146}}{\sqrt[3]{121}} = \frac{5,2}{4,9}$$

Vor der Ausziehung der kubic. Wurzel muß der radicand-Zahlen zuerst mit dem Cubus der Zahl, welche diesen bey der Ausziehung der kubic. Wurzel zum ersten Theil-Quotienten gegeben hat, das 3fache und 3mal der Quadrat der Nenners multiplizirt wird, und diesen mit der Zähler jedesmal in vollkommenen Cubus verwandelt, dessen Wurzel bekannt ist.

z. B. $\sqrt[3]{\frac{7}{11}} = \frac{\sqrt[3]{7 \times 11 \times 11}}{\sqrt[3]{11 \times 11 \times 11}} = \frac{\sqrt[3]{847}}{11} = \frac{9.4}{11}$

Um nun die gegebene Zahl und radicand der kubic. Wurzel zu finden, so nehme man Alles, was ob der Zahlen der Zähler und Nenner noch übrig ist, wie man sie findet, wie viele Stellen

Setzen wir solche Zahlen in der 2 Stelle zur Rechten ein,
so erhalten wir

Beyspiel.

$\sqrt[3]{0,345} = 0,69$

$\sqrt[3]{0,525} = 0,79$

$\sqrt[3]{0,05} = 0,17$

$\sqrt[3]{14,0314} = 8,99.$

Die ersten Ziffern in der Wurzel sind bekannt
Das Cubiren und Cubik-Wurzelausziehen wurden
in D. Landwirthschaftlichen Rechnen 5ten, 6ten, 7ten Abtheilung
die zweitheilige Wurzel A + B auf diese Weise
Abtheilungsweise Berechnet, um die

Lehrsatz. Diese Potenzen zu finden, dient die Rechnung mit den Logarithmen, welche bey den Logarithmen dann Logarithmen genauer gezeigt werden soll. Für den Fall, da a + b bedeutet,

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6,$$

Anmerkung. Hieraus ist die Erklärung der Exponenten, welche Brüche anzeigen, klar. Es sey z. B. die Potenz $a^{\frac{1}{2}}$ zu finden, da sich das Gesetz $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt $= a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 = a$ ist. Nun ist $\sqrt{a} + \sqrt{a} = a$ ist, folglich $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ seyn.

Beispiel $25^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{25} = 5$

Da $a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{3}} = a^1 = a$ und da

$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}$ abermals $= a$ ist, so muß $a^{\frac{1}{3}} =$

$\sqrt[3]{a}$ seyn.

Der Allgemeine ist Brüchen $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Allgemein endlich ist Brüchen $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$,

welches Folgende Regel gibt:

Wenn Grösse mit Logarithmen soll behandelt werden, so bedeutet der Name derselben den Logarithmen der Zahl, welche durch Potenzirung den Numerus gibt, dessen Logarithmus der Name ist. —

Grundbegriffe
und
Vordersätze
von den
Progressionen.

Progressionen.

§. 1.

Eine Reihe von Zahlen, welche nach einem bestimmten Gesetze fortgehen, heißt eine Progression. Die Zahlen, aus welchen eine Progression besteht, heißen ihre Glieder. Z. B.

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25 . . .

1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. . . .

30. 26. 22. 18. 14. 10. 6. 2. . . .

21. 18. 15. 12. 9. 6. 3. . . .

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. . .

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729 . . .

1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{64}$ . . .

Über die Verbesserung dieser Brüche nach Faktoren, das heißt, die Einführung neuer Nenner, das Gesetz der gemeinschaftlichen oder kleinsten Nenner betreffend.

§. 1. Alle unechten Brüche oder Faktoren, die Zähler und Nenner gemeinschaftlicher Faktoren haben, lassen sich verbessern, das heißt, in solche Faktoren verwandeln, deren Zähler und Nenner keine gemeinschaftlichen Faktoren haben.

§. 2. Um die Faktoren in gemeinschaftliche und ungemeinschaftliche zu unterscheiden, suche man zuerst den größten gemeinschaftlichen Faktor beider Zahlen, und dividire mit diesem in beide Zahlen, so werden die Quotienten keine gemeinschaftlichen Faktoren haben.

§. 3. Die Verbesserung, oder Verwandlung der Faktoren in andere, deren Zähler und Nenner keine gemeinschaftlichen Faktoren haben, geschieht auf folgende Art:

Man multiplicire den Zähler mit dem Nenner, und den Nenner mit sich selbst, so wird das Produkt der Zähler, und das Produkt der Nenner sein neuer Faktor.

Damit die nachstehenden die genauen richtigen Zeugnisse
sind, sind nachstehende, Zeigende, wenn die folgenden
Blinden innerhalb Bestehende Fallende, wenn die folgenden
Blinden innen Klauen werden.

Hinreichend grosse Summen, das Zeigende Zeugnisse,
einkommen gelassen, einen Fallenden, jede Fallende Zeugnisse
über einkommen Gelassene, einen Zeigende sey.

Einen Falsch, das Zeigende Einmischen rechnenden
folgenden Blinden einen Zeugnisse einnehmen
Fallzeigen Zeugnisse bilden, wenn mag sich durch
Fallenden unsere wenn will. Vgl. L. nächsten
Blinden seit 5 — 7 = 7 — 9 wo x 9 = 11 = 11 — 13. wo x
20 — 22 = 22 — 18. 22 — 18 = 18 — 16 wo x
2 : 4 = 4 : 8. wo x 4 : 8 = 8 : 16 wo x : 3 : 9 = 9 : 27 : 9 : 27 = 27 : 81.

Um die Progression allgemein zu bezeichnen, bedient man sich gewöhnlich der Buchstaben. Nimmt man z. B. das 1te Glied einer arithmetischen Progression

a, das 2te Glied $a+d$, das 3te $a+2d$, das 4te $a+3d$, das 5te $a+4d$, das 6te $a+5d$ u. s. w., so ist die Reihe nun, wenn sie fortgesetzt wird, folgender allgemeiner Ausdruck:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ a+5d.$$

$a=3$ $\quad 3,\ \underbrace{3+2}_{5},\ \underbrace{3+2.2}_{7},\ \underbrace{3+3.2}_{9},\ \underbrace{3+4.2}_{11},\ \underbrace{3+5.2}_{13}$

$d=2$ $\quad 3$

Sollen aber die Progressionen nun fallend fortgehen, so müssen sie folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$a,\ a-d,\ a-2d,\ a-3d,\ a-4d,\ a-5d$$

$a=50$ $\quad 50,\ \underbrace{50-5}_{45},\ \underbrace{50-2.5}_{40},\ \underbrace{50-3.5}_{35},\ \underbrace{50-4.5}_{30},\ \underbrace{50-5.5}_{25}$

$d=5$ $\quad 50$

Wo die Zahl Einer Primzahl bleibt die Differenz nicht aber
nach einer Multiplication der nächsten Zahl mit sich selbst,
so muß Eine Einfache Wurzel, welche Größe
als Null sind in diesem Falle kommensurabel Glieder
in die Progression L. B. 5. 2. — 1 — 4 — 9 — 16 ..
Wenn das erste Glied irgend einer Progression
a ist und die gemeine Progressions Exponent = e, so stellt
folgende die Progression allgemein dar.

a = 6
e = 3

a. ae, a.e.e, a.e.e.e, a.e.e.e.e. p.p.

a, ae, ae², ae³, ae⁴ L.p

6. 6.3, 6.3², 6.3³, 6.3⁴

6. 18. 54. 162. 486.

Wenn aber der Exponent dieser Reihe nicht Einheit

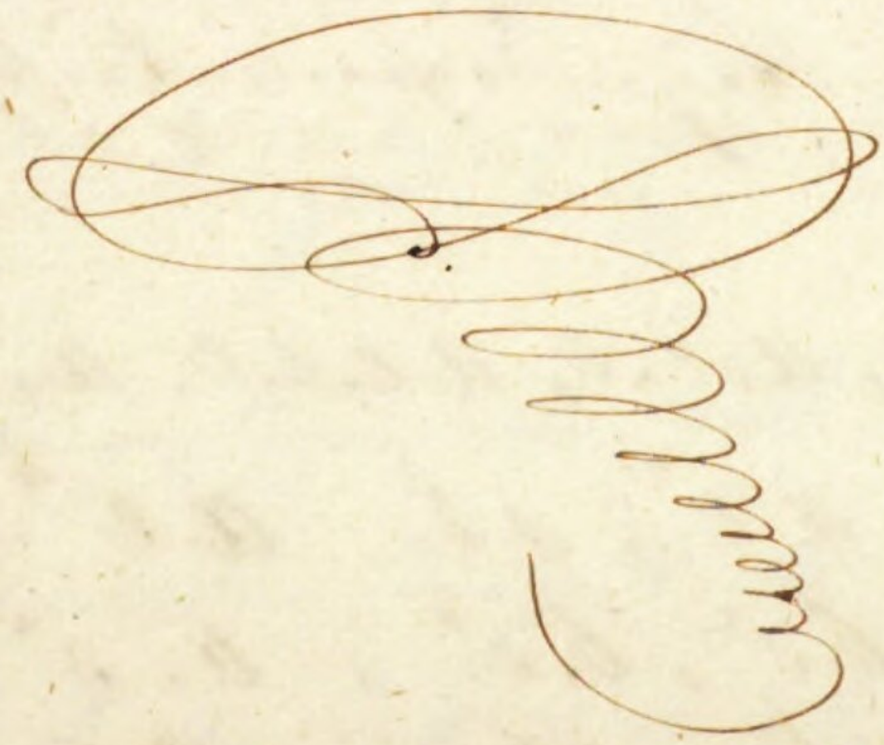
z. B. $= \frac{1}{c}$ fortsetzende die fallende Reihe folgende.

$$a, \frac{a}{c}, \frac{a}{c^2}, \frac{a}{c^3}, \frac{a}{c^4}, \dots \frac{a}{c^n}$$

$$b, \frac{b}{3}, \frac{b}{3^2}, \frac{b}{3^3}, \frac{b}{3^4} \dots \frac{b}{3^n}$$

$$6, \frac{6}{3}, \frac{6}{9}, \frac{6}{27}, \frac{6}{81}.$$

Wenn nun diese Factoren einmal gegebene Brüche alle so machen, die Glieder dieser Progression nächsten Zahlen, welche der Factor angiebt, zu Zählern, Zähler zu Nennern.



Elementarlehren

von den

arithmetischen Progressionen.

a. Arithmetische Progression.

§. 1.

1. Lehre in der arithmetischen Progression kürzer schriftlich zu entwickeln.

Das erste Glied welches man nennt a.

Die Differenz welche man nennt d.

Die Zahl der Glieder welche man mit n bezeichnet.

Das letzte Glied welches man nennt z.

Die Summe aller Progressionsglieder welche man mit S und nennt.

Aus diesen gegebenen angiebt sich, das jedes Glied eines arithmetischen Progressionsstammes Exponent bestimmt ist, sobald man das erste Glied und die Differenz bestimmt hat, denn ist das folgende Glied das erste plus dem ersten Glied mehr einer Differenz.

Wenn z. B. das erste Glied = 5 und die Differenz = 4, so kommen wir für das folgende Glied durch die Summe 54 (n. 4) zum Ziele, wo wir irgend die Differenz selbst bestimmen können.

Letztere ist nun die arithmetische Progression genannt, sie zeigt sich, das Binden 2ten Gliedes die Differenz einmal

" 3ten " " " zweimal,

" 4ten " " " dreimal,

" n^ten " " " n-mal

vorkäme. z. B. 5ten Glied = 5

Differenz = 4, so würde das 21ste Glied

diese Differenz 20 mal vorkommen, und dieses Glied müßte =

= 54 (21 − 1). 4 sein, daher 54 (20. 4) = 54 + 80 = 85.

Setzt man das n^te Glied = a, so setzt man die Summe für das letzte Glied.

$$a = a + (n-1) \times d.$$

verdaber

Wir zwischen irgend zwei benachbarten Glieder in einer Reihe,
wovon das erste Glied = a die Differenz = d wäre
100te Glied = a + (100 − 1) × d = a + 99 d
Allgemein der Formel: U = a + (n − 1) × d dass man
die Differenz, die Größe irgend eines Gliedes, somit
auch die Größe a, somit zugleich auch U − a
= a + (n − 1) × d wird, da gleiches gleichmal zugleich
auch gleiches heißt, das übrig bleibt.
Wird nun durch n − 1 dividirt, so zer-
fällt man, da gleiches durch gleiches dividirt gleiches
Quotienten gibt:

$$d = \frac{U - a}{n - 1}$$

welches folgende Allgemeine Regel gibt:
Man findet die Differenz zweier mittelsten

Frage: Wie viele Glieder hat eine Reihe, wenn das letzte Glied doppelt so groß ist, als das vorletzte, und die Summe aller Glieder = 90 ist?

Es sei n die gesuchte Zahl der Glieder, d die Differenz, a das erste Glied, l das letzte Glied, S die Summe aller Glieder, so ist

$l = 30$

$a = 2$

und die Zahl der Glieder $= 8$, also $d = \frac{30-2}{8-1} = \frac{28}{7} = 4$.

Nun ist aber nach der allgemeinen Formel $U = a + (n-1) \times d$, wenn n die Zahl der Glieder, d die Differenz zwischen zwei Gliedern und U das letzte Glied bedeutet, $\frac{U}{d} = \frac{a}{d} + n - 1$.

Wird nun das Glied $\frac{a}{d}$ hinüber gebracht, so ist $\frac{U}{d} - \frac{a}{d} = n - 1$, oder $\frac{U-a}{d} = n - 1$, mithin $n - 1 = \frac{U-a}{d}$, folglich $n = \frac{U-a}{d} + 1$

Diese ist die Regel.

Die Summe von letzten Gliede der n ersten Glieder einer Reihe, deren Differenz durch den Buchstaben d bezeichnet wird, ist gleich dem Produkte aus der halben Anzahl der Glieder in das letzte Glied, weniger das Produkt aus der halben Differenz in die Anzahl der Glieder weniger 1.

Wenn also die Glieder einer Progression, wenn das letzte Glied = 21

die ersten " = 3

die Differenz = 3 ist, so ist

$$n = \frac{21-3}{3} + 1 = \frac{18}{3} + 1 = 7$$

die Progression besteht also aus 7 Gliedern und ist folgende: 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21

Auch kann man aus der bekannten Summe

$S = a + (n-1)d$ den Anfang a ableiten, wenn man

$\frac{n}{2}(n-1)d$ abzieht, somit $S - (n-1)d = a$

wie $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$. Diese Formel heißt Bildungsgesetz.

Wenn man die Differenz mit den Zahlen zusammenfasst

Glieder zusammenlegt und diese Formel nennt man letztes Glied, subtrahiert, so erhält man das n-te Glied z. B. wie

viel beträgt das 100ste Glied, wenn die Reihe 1, 3, 5, 7 ... ist?

1 die Differenz = 2 die Hälfte des Gliedes = 1. d.

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2$$

$$= 1 + 6 \cdot 2$$

$$= 1 + 12$$

$$= 1$$

$$a_n = 1.$$

Zusammenstellung der Formeln

§ 1.

Formel, um das letzte Glied zu finden = $U = a + (n-1) \times d$

U = letztes Glied

a = erstes Glied

d = Differenz

n = Zahl der Glieder

Formel um die Differenz zu finden $d = \frac{U - a}{n-1}$

Formel um die Gliederzahl zu finden $n = \frac{U - a}{d} + 1$

Formel um das erste Glied zu finden $a = U - (n-1) \times d$

§ 2.

Wenn man einen Grundbegriff mathematischen Operationen in der Reihenfolge seines Gliedes betrachtet, so zeigt sich, daß jedes Glied seine bestimmte, und durch jedes folgende Glied seine Differenz muß erhalten

Summe des 1ten und 3ten weniger des 2ten Gliedes
Summe des 1ten und letzten Gliedes, somit Hälfte
der Summe des 2ten und vorletzten, somit Hälfte
der Summe aller Glieder
gleich sein, weil der nächste Schritt des ersten Gliedes
mit dem letzten Gliede die Differenz gemacht hat, so
viel als der letzte mit dem vorletzten Differenz macht etc.
Letzter macht gerade diese Differenz mehr gegen den Summen
gleich weniger als vorkommen

Nimmt man also eine beliebige folgende allgemeine Reihe
der arithmetischen Progression 1. Ordnung
progression: $a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d$ die Summe
des ersten und letzten Gliedes =

$= a+(a+5d) = a+d+(a+4d)$

$= 2a+5d = 2a+5d.$

Wenn die Zahl der Progressionsglieder ungerade ist
so muß die Summe das Mittelglied mal die Gliederzahl
geben. Allgemein heißt sie

Wenn daher die Gliederzahl ungerade ist und durch
alle Gliederzahlen kommt, so giebt das Halbe
Summe mal allemal Glieder die Summe
der beiden, die gleich weit von den Enden stehen
$\frac{n}{2}$ Summe, wenn $n = a + d$ ist.

Daher wäre die Summe aller Glieder der Progression
$S = \underline{\underline{(a+d) \times \frac{n}{2}}}$.

Wäre aber die Gliederzahl gerade, so
fehlte noch $\frac{n-1}{2}$ halbe Summe, wenn
$= a + d$ ist, und die Summe aller Glieder
$= a + d + \frac{n-1}{2}$.

Von einer diskreten Arithmetischen Reihe $d = \frac{(a+u)}{2}$ ist, so muß die

Summe aller n Glieder $= (a+u) \times \frac{(n-1)}{2} + \frac{(a+u)}{2} =$

$= (a+u) \times \frac{n}{2} - \frac{a+u}{2} + \frac{a+u}{2}$

$S = (a+u) \times \frac{n}{2}$ seyn.

Wenn man die Summe aller Glieder einer diskreten arithmetischen Reihe, wovon das erste Glied $= 3$ und das letzte $= 23$ und die Summe $= 143$ ist, gefunden haben will, so darf man nur in die Formel $S = (a+u) \times \frac{n}{2}$ für a 3, für u 23 und für n 11 setzen, weil 11 die Anzahl der Glieder ist, also $S = (3+23) \times \frac{11}{2} = 143$

Auf diese oben gefundene Summenformel lassen sich folgende Aufgaben für die Mathematik, Mündel anbringen.

Wenn man in dieser Formel: $S = (a+u) \times \frac{n}{2}$ auf beyden Seiten mit $\frac{2}{n}$ dividirt und hierauf beyderseits $\frac{2b}{n} =$

$= a+u$ findet, so kann man beyde Werthe gleichsetzen.

$A = \frac{2 \cdot S}{n} - M$ s. f.

Die Zeichen Bedeutung Die Buchstaben Glieder Durchmesser Glieder Anzahl Die Glieder Anzahl Die Buchstaben Bedeutung Glieder Subtraktion, Summenzeichen Glieder Die Progression: L. Die Summe Progression:

$S = 116$

Letzte Glied $= 25$

Die Glieder Anzahl $= 8$ mit Progression Glieder

$A = \frac{2 \times 116}{8} - 25 = 4$

Vollmond Mondphasen Abschnitt, Jedarf

monein Durchschnittsalter Subtrahieren $\frac{2 \cdot S}{n}$

Abschneidung Durchschnitt Die Größe A

Subtrahieren Durch Rede

$$n = \frac{2S}{a+l} - a$$ wird Dasjenige Glied

Man findet das letzte Glied eines arithmetischen
Progression, wenn die Summe aller Glieder durch
die Gliederzahl dividirt wird, wovon Quotienten das
erste Glied abgezogen wird. z. B.

Eine Progression hat 8 Glieder, wenn $S = 116$

das erste Glied $= 4$

Die Gliederzahl $= 8$ ist:

$$l = \frac{232}{8} - 4 = 25.$$

Soll die Progression bestimmt werden, so dividirt man
in die Formel: $S = (a+l) \times \frac{n}{2}$ welche die Summe
mit $a+l$ so wird $\frac{S}{a+l} = \frac{n}{2}$ und wenn man
selbe mit 2 multiplizirt ist so ist

$n = \frac{2\,S}{a+u}$ Daraus die Regel.

Man nimmt die doppelte Summe aller Progressionsglieder durch die Summe des ersten und letzten Gliedes dividirt, so ist der Quotient die Zahl der Glieder.

Z. L. $S = 148$
$a = 1$
$u = 36$ wenige Bisse. $\quad n = \frac{2 \times 148}{1+36} = \frac{296}{37} = 8$

Wie groß ist die Differenz dieser Progression die Differenz, um wie viel ist die Reihe zu halten?

Die Differenz: $d = \frac{u-a}{n-1} = \frac{36-1}{8-1} = \frac{35}{7} = 5$

Reihe: 1. 6. 11. 16. 21. 26. 31. 36.

Anwendung dieser Formel.

§ 3.

Die allgemeine Regel heißt:

Um die Summe von einer gewissen Anzahl Anfangsgliedern einer arithmetischen Reihe zu finden, addire man das Quadrat dieser Anzahl zu sich selbst und subtrahire die Summe, so ist die Hälfte der verlangten Gliedersumme.

Das ist z. B. die Summe der ersten 30 ungeraden Zahlen $= \frac{30^2+30}{2} =$

$= \frac{900+30}{2} = \frac{930}{2} = 465.$

Die Summe aller aufeinanderfolgenden ungeraden von 1 anfangenden Zahlen, bis zu einer, der Zahl Anfangsgliedern ungeraden ist das Quadrat dieser Anzahl. Das ist z. B. die Summe der ersten 20 ungeraden Zahlen $= 20 \cdot 20 = 20^2 = 400$ d. s.

$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27+29+31+33+35+37+39$

$= 400.$

I Aufgabe: Wenn man 30 Ellen dicken Stoff macht
zahlt sich die 1te Elle zu graben 20 kr. für jede folgende aber
10 kr. mehr, so ist die Frage wie viel die letzte Elle und wie
viel der ganze Stoff zu graben kostet?

$a = a + (n-1) \times d$ sind also $a = 20$
$d = 10$
$n = 30$ daher

$a = 20 + (30-1) \times 10 = 20 + 29 \times 10 = 290 + 20 = 310$ kr. also die
letzte Elle zu graben.

Die letzte und die erste Elle zusammen kommt eben so viel,

$S = (a + a) \times \frac{n}{2}$, so wird $S = (20 + 310) \times \frac{30}{2} = 310 + 20 = 330 \times \frac{30}{2} =$
$330 \times 15 = 4950$ kr. $= 82$ fl. 30 kr., welche Summe der ganze
Stoff zu graben kostet. —

II. Wenn auf einem Anhöhe Bäume in der Reihe stehen
Reihe 4 Zeugel in der 2ten sind in der 3ten 18 u. s. w. sich

besonders und wenn selbst Reisen zu je 30 sind, so ist die Frage:
„Wieviele Tage braucht der kürzeste der Reisenden und wieviele
besuchen sie?“ zu untersuchen.²

$a = 4$ $\quad a_n = a + (n-1) \times d = 4 + (30-1) \times 3 = 29 \times 3 + 4 = 91$

$n = 30$

$d = 3$ $\quad S = (a + a_n) \times \frac{n}{2} = (4 + 91) \times \frac{30}{2} = 95 \times 15 = 1425$; daher

soll der kürzeste Reise 91 Tage und der längste daher 1425 Tage.

III.) Ein Reisender hat höchstens 19 Tage zur Verfügung und nimmt sich, das Baumwollgebiet Tage 1/4 Meilen weit von den nächstgelegenen und dann täglich Tage 1 1/2 Meilen zurückgelegt haben. Es soll abermals gefragt werden, wie groß seine ganze Reise war und wieviele Meilen er täglich Reise machen.

Tage der soll gefunden werden. —

$n = 19$ $\quad a = a_n - (n-1) \times d.$

$d = 1/4$

$a_n = 1\frac{1}{2}$ $\quad 1\frac{1}{2} - (19-1) \times \frac{1}{4} = \frac{58}{11} - \frac{18}{11} = \frac{40}{4} = 10$ wurden täglich Tage

$S = (a + d) \times \frac{n}{2} = (10 + 16\frac{1}{2}) \times \frac{19}{2} = \frac{49}{2} \times \frac{19}{2} = \frac{931}{4} = 232\frac{3}{4}$ Th. Dass die letzte Lagerschicht 10 Meilen und die hinterste Reihe aber $232\frac{3}{4}$ Meilen entfernt.

Elementar-Lehren

von den

geometrischen Progressionen.

Ernst Heindl

5. Geometrische Progressionen.

Eine jede geometrische Progression kann mit Hilfe der
arithmetischen 5 Stücke in Betracht.

1. das erste Glied a
2. den Quotienten q
3) das letzte Glied a_n;
4. die Zahl der Glieder n;
5. die Summe aller Progressionsglieder S_n.

Aus den Begriffen und der Entstehung einer geometrischen
Progression ergibt sich, daß jedes Glied derselben, mit
Ausnahme des ersten, dadurch entsteht, daß das Glied dem vor
ihm stehenden Gliede den Quotienten q zugeordnet wird. Nun ist das zweite Glied
$a_2 = a \cdot q$, das dritte Glied $a_3 = a_2 \cdot q = a \cdot q^2$, das vierte Glied
$a_4 = a_3 \cdot q = a \cdot q^3$ und allgemein das n-te Glied $a_n = a \cdot q^{n-1}$, d. h.
jedes Glied ist gleich dem ersten Gliede multiplizirt mit der

jedes Glied dasselbe Fortschreitungsgesetz wie jedes Glied in einer
der Exponentialreihen, nämlich das 1ste Glied = a

Exponential = e. Also,

zusammengesetzt mit Allem, was der Progression:

a. a.e, a.e², a.e³, a.e⁴, a.e⁵, a.e⁶, müssen wir setzen, daß das 3te
Glied, der Exponentialreihe auf der 2ten Setzung, das 4te der
Exponentialreihe auf der 3ten Setzung u. s. w. endlich, wo dann
also das nte Glied dieser Exponentialreihe auf der Setzung n-1 ste
stehen wird, das nte Glied der ganzen Reihe a. sein wird
nächsten Glied $= a \times e^{n-1}$. also

$u = a \times e^{n-1}$. Dieß gibt die allgemeine Regel.

Man findet die Größe irgend eines Gliedes der
gemischten Progression, wenn der Ort des Gliedes mit seiner
Setzung der Exponentialreihe multiplizirt wird, denn zu dem
Gliede zugemultiplizirt gleichfalls.

Beispiel.

$a=4$ dessen $u = 4\times 2^7 = 4\times 128 = 512$ und die Progression

$e=2$
$n=8$ heißt: 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512.

In der Formel: $u = a \times e^{n-1}$ kommt nämlich das Produkt von a und jener von e mit 1 weniger als n vor. Wenn man nun e^{n-1} dividirt so wird

$$a = \frac{u}{e^{n-1}},$$ woraus die Regel folgt:

Wenn sind das letzte Glied einer geometrischen Progression, man das letzte Glied durch jenen Faktor des Exponenten dividirt, dann Grad des Gliedes weniger 1 ist.

Aufgabe. Die ganze ist das letzte Glied einer geometrischen Progression, wo $u = 6561$
$e = 3$
$n = 9$ ist. a?

$$a = \frac{6561}{8} = \frac{6561}{6561} = 1.$$

Aus der Formel $a = A \cdot e^{n \cdot i}$ der Wurzelform zu finden,

wenn $\frac{a}{a} = e^{n \cdot i}$ und der Zirkelwinkel gegeben ist, wenn n und

wenn $\sqrt[n]{\frac{a}{a}} = e$ Substitution

$$e = \sqrt[n]{\frac{a}{a}}$$. Woraus folgende Regel fließt:

Wenn man den Halbmesser eines Kreises in die Einheit,

und den Winkelgrad in Bogenzirkel, dann den Grad

des Zirkelwinkels umwechselt findet, so fällt man den Exponenten

des Exponenten

Aus in einem gemeinschaftlichen Exponenten die Einheit des

zu finden merke man folgende:

Wenn man den Exponenten eines gemeinschaftlichen Exponenten

von Sinus hat, eine Einheit des selben, und diesen selben Sinus

dann den Winkelgrad mit der Einheit multipliziert,

so erhält man die Summe aller Producte n einzelner Glieder, mit n aus dem
$(n+1)^{ten}$ Gliede.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens folgt aus der, den gegebenen Progressionen: $a, ac, ac^2, ac^3, ac^4, ac^5$, so ist $a - ac^5$.

Da nun das n^{te} Glied $= a$ ist, so stellt $ac^5 - a$ die
Differenz zwischen dem letzten und ersten Gliede der Progression. Verstehen
der Exponent $= e$ ist, so wird $e-1$ die Anzahl sämmtlicher
Exponent seyn, und die wirkliche Division mit $e-1$ in
$ac^5 - a$ gibt folgende

$$e-1 \;\Big|\; +ac^5 - a \;\Big|\; +ac^4 + ac^3 + ac^2 + ac + a$$

$$\begin{array}{l} \pm ac^5 \mp ac^4 \\ \hline +ac^4 - a \\ +ac^4 - ac^3 \\ \hline +ac^3 - a \\ +ac^3 - ac^2 \\ \hline +ac^2 - a \\ +ac^2 - ac \\ \hline +ac - a \\ \pm ac \mp a \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ac^5 + ac^4 + ac^3 + ac^2 + ac \\ -ac^4 - ac^3 - ac^2 - ac - a \\ \hline ac^5 - a \end{array}$$

=

Von der verschiedenen Quotient die Summe der Glieder der gegebenen
Progression, dann Anfangs, letzte die vorige Letzte, die Summe,
welche Vorige Allgemeine nützliche die Summe gibt:

$$S = \frac{a \times c^n - a}{c - 1}$$

Aus dieser Summe kommen
erhalten

Summe der Werthe von Anfangsnumeren

$$a = \frac{S \times (c-1)}{c^{n-1}} \quad \text{u. s. f.}$$

wenn die Summe
aller Progressionsglieder mit Ausnahme des letzten gegeben
multiplizirt und dieses Product durch einen Factor des Quotienten
dieser Glieder, Glieder zahl gleich sind von diesem Werthe
subtrahirt wird, so wird das Quotient der ganzen
Progressionsglieder in der Form

Die Summe aller Glieder zu finden:

$$c = \frac{S - a}{S - u} = \text{Der Quotient}$$

d. s. man findet den Quotienten, man setzt den Divisor so
gerschwind zu der nächsten Ziffer und verfährt mit dieser
Division nach der Regel der Ziffer abzuziehen und der letzten Divi-
sion in der Art die Division.

Aufgabe. Ein Geometrischer Satz soll in 8 Termen 2 f
und zwar sind. Es wird gefragt wie der Satz zu machen
und zwar in der Art, daß die Summe der Glieder
Diese Satz soll 8 Glieder und 8 Termen haben, nun
seine Basis ist 2, Quotient ist 3 und die 8te Term
allein und wir suchen die Summe.

$$u = a \times c^{n-1} = 2 \times 3^{8-1} = 2 \times 2187 = 4374 \text{ f}$$ der 8te Term

soll nun die 8te Term 4374 f, die Summe der
ganzen Reihe $= S = \frac{a \times c^n - a}{c-1} = \frac{2 \times 3^8 - 2}{3-1} = \frac{2 \times 6561 - 2}{3-1} =$

$\frac{13120}{2} = 6560$ f. Endlich ist die ganze Reihe.

$n = 8$
$a = 2$
$c = 3$

II. Wie viel beträgt das ganze Vermögen Fritzens, wenn 2/5 desselben 4/5 seines Vermögens weniger 4 Gulden betragen?

a = 2
n = 10
c = 2

$$S = \frac{a \times c^n - a}{c - 1} = \frac{2 \times 2^{10} - 2}{2 - 1} = \frac{2048 - 2}{2 - 1} = \frac{2046}{2 - 1} = 2046 \text{ fl} - \text{x}$$

welches Fritzens ganzes Vermögen beträgt. —

III. Wenn ein Kaufmann auf folgende Bedingung verkauft wird, daß er für den ersten Hufeisennagel 1 Heller, für den 2ten 2 Heller, für den 3ten 4 Heller, und für jeden folgenden immer doppelt viel als für den vorhergehenden bezahlen muß, so fragt es sich, wie hoch sich der Kaufpreis dieses Pferdes belaufen werde, wenn es 32 Hufeisennägel bekommen soll?

a = 1. $A = a \times c^{n-1} = 1 \times 2^{31} = 1 \times 2147483648 = 2147483648.$
c = 2
n = 32 $S = \frac{a \times c^n - a}{c - 1} = \frac{1 \times 2^{31} - 1}{2 - 1} = \frac{2147483648 - 1}{2 - 1} = \frac{2147483647}{2 - 1}$ Heller
$= 17895697$ Gulden 3 Kreuzer 1 Heller. Der Preis dieses Pferdes bey 32 Hufeisennägeln.

Zeitungsfrau

VODERSAETZE

und

GRUNDBEGRIFFE

von den

LOGARITHMEN.

LOCALIDAD.

Von den Logarithmen.

§. 1.

1. Die Logarithmen entstehen aus der gegenseitigen Vergleichung zweier Glieder einer arithm. Progression mit denen correspondirenden einer geometrischen.

Ist diese Verbindung statt findend, muß gegeben werden, wie manche Glieder der arithm. Reihe in einer von der andern, selben Entfernung stehen, damit jedesmal das Glied = 0 ist, wo man sagen will, das correspondirende Glied der geometrischen Reihe ist = 1 ist.

Es seyen die Reihen folgende.

a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d, a+6d. . . .

a. ae. ae^2. ae^3. ae^4. ae^5. ae^6. . . . so muß, wenn man will, daß das 1te Glied der arithm. Reihe das 1te Glied der geometrischen sey, jedes Glied der IIten Reihe durch dasjenige Glied der I. Reihe dividirt folgende

2 Progressionen geben. a. a. a. a. a. a. a

1. e. e^2. e^3. e^4. e^5. e^6 u. s. w.

Forderung vorausgenommen wird.

3. Bei der Betrachtung dieser Brüche ergibt sich, daß die positiven Brüche in die folgende Glieder-Reihe und die negativen Brüche in die folgende Glieder-Reihe gehören.

Setzung der Exponenten.

Der wovon diese Brüche genommen sind:

$0d, 1d, 2d, 3d, 4d, 5d, 6d \ldots$

$c^0, c^1, c^2, c^3, c^4, c^5, c^6 \ldots$ so ergibt sich, daß in Beziehung auf die Glieder der Brüche zugleich die Exponenten der Glieder der gemeinschaftlichen Brüche sind, welche sich in beiden finden.

4. Betrachtet man die Brüche nicht mehr stark, sondern diese folgende

$-d \quad -2d \quad -3d \quad -4d \quad -5d \quad -6d \quad -7d \ldots$

$\frac{1}{c}, \frac{1}{c^2}, \frac{1}{c^3}, \frac{1}{c^4}, \frac{1}{c^5}, \frac{1}{c^6}, \frac{1}{c^7} \ldots$ und man findet, daß die

geometrische Reihe mülsalso zusammengesetzt sein:

$e^{-1}, e^{-2}, e^{-3}, e^{-4}, e^{-5}, e^{-6}$ .....

Die Anordnung jedes Gliedes der arithmetischen Reihe die Größe der

sonach für die gesetzte Reihe folgende: 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. / für die

negative folgende: 0, – 1. – 2. – 3. – 4, – 5, – 6 – 7, welche die Reihenfolge der

natürlichen Zahlen und zugleich auch die der Potenz Exponenten

der Glieder der geometrischen Progression darstellt.

B. Durch die Zusammenstellung beider Reihen nach folgende Verbindung;

– 5 – 4 – 3 – 2 – 1, 0, +1 +2 +3 +4 +5

$e^{-5}, e^{-4}, e^{-3}, e^{-2}, e^{-1}, e^{0}, e^{+1}, e^{+2}, e^{+3}, e^{+4}, e^{+5}$, wonach jedesmal der Platz die Anfangs-

punkt der arithmetischen Reihe / also das Anfangsglied der geometrischen

Progression bestimmt werden kann. Auch ist klar, daß die Exponenten

der Glieder in der geometrischen Reihe arithmetische Progression

bilden.

c. Das Verhältniß $e^0 : e^1$ d. h. das Verhältniß von 1 zu e: heißt

das Verhältniß Gleichen des Progression, somit zum Exponent

zum Unterschied nennt man dieses Verhältniß das

Grundverhältniß.

Der oben erwähnte Multiplicator = 1 ist, so heißt die Reihe

dieses Grundverhältniß beigegliedrigen der Größen des Intervalls

wird dasselbe die Grundzahl genannt und bezeichnet, das Verhältniß

beliebiger Grundzahlen zu einander zu bestimmen ergiebt sich

Progression gibt z. B. wenn $e = 10$ so wären zu $e^0 : e^1 = 1 : 10$ und

die Progressionsreihe folgende: 0,001, 0,01, 0,1, 1, 10, 100, 1000, 10000 oder

$10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0, 10^{+1}, 10^{+2}, 10^{+3}, 10^{+4}$ p. p. f.

3. Da zu e^1 ein Verhältniß und dem Verhältniß zu e^1 zu e^2 noch 2 solche Grundverhältniß,

nämlich $e^0 : e^1 = e^1 : e^2 = e^2 : e^3$, so liegen zwischen $e^0 : e^3$ wieder 3 solche

Grundverhältniß und der Schlüssel des Zwischen $e^0 : e^{n-1}$ noch $n-1$ dieser

Grundverhältniß liegen, denn jedes $= 1 : e$ ist.

§. 2.

1. Nennt man die Zahl, das Grundverhältniß, welches zwischen zwei
ersten Zahlengrößen, die einander nächst sind, stattfindet, den Grad
dieses, jedesmal durch die Summe dieser beiden nächst kleinern Grade ausgegeben
wird, so heißen diese Grade die Verhältnißzeiger der
Logarithmen, genannt. Sind die Reihe $e^0, e^1, e^2, e^3, e^4, e^5, e^6 \ldots e^{n-1} e^n$ u. s.
f. so heißt die Logarithmus von $e^0 (= 1)$, mit dem Grundverhältniß Ver-
hältnißbild, und somit das Grundverhältniß Verhältnißzeiger
genannt werden kann; der Logarithmus von e^1 ist 1, mit dem $e^1 = e$ müssen
1 Grundverhältniß liegt; der Logarithmus von e^2 ist 2, mit dem e^2
bis e auf der 2ten Potenz müssen solches Grundverhältniß liegen.

Hieraus sieht man, warum sie zur Berechnung haben genommen
werden, weil sie nun Verhältnißzeiger sind, welche
nur Zahlen als Logarithmen zu sich nimmt, als wenn
die zu jenem Grundverhältniß stehen, Grundverhältniß, als der
Logarithmus durch seine Einheit drückt.

§. 7. Da die Grundzahl willkührlich genommen werden kann, so sind die Logarithmen derjenigen Zahlen durchaus verschieden, welche Glieder einer und derselben geometrischen Reihe sind, wenn die Grundzahl 2. 3 oder 10 war, somit sind die folgenden 3 Reihen, zu denen jedes die 6 ersten Logarithmen

Reihen gehören.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729

1. 10. 100. 1000. 10000. 100000. 1000000.

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. Logarithmen

Der Logarithmus 4 gehört zu der Glieder 16. 81 10000 Da man 1 — 16 und 2 — 81 und man 1 — 10000 4 Grundmannfaltigkeiten hat, da nun 1: 2 oder 1: 3 oder 1: 10.

8. Soll diese Allgemeinheit, welche der natürliche Logarithmus wesentlich hat, nicht verloren gehen, so muß Brigs für allemal zum Grundgesetz der Grundzahl angenommen werden.

Wenn es übereingekommen, diese Grundzahl 10 dem dekadischen Gesetze gemäß = 10 zu setzen, so drücken die bestimmten Logarithmen die Exponenten in welchen in den Logarithmus seinem bestimmten Grundzahl, so nämlich, so müssen die Logarithmen der Brüche die Exponenten dieser Grundzahl 10 sein. Also drücken die Logarithmen folgender: 0,0001, 0,001, 0,01, 0,1, 1, 10, 100, 1000, 10000 ff. — 4 — 3 — 2 — 1 0 1 2 3 4 ff. wovon sich auch die Vorschrift der negativen Logarithmen ergibt.

Demnach sind die Logarithmen ächter Brüche positiv, wie die negativen. Die Verhältnisse sind, so wie die Logarithmen der Verhältnisse 1 : 1 = 0, das Verhältniß 1 : 10 = 1, das Verhältniß 1 : 100 = 2, das Verhältniß 1 : 10 = 1, das Verhältniß 1 : 0,1 = −1, das Verhältniß 1 : 0,01 = −2, das Verhältniß 1 : 0,001 = −3 ff. Hieraus folgt, daß die Logarithmen der Zahlen, die zwischen 1 und 10 liegen, größer als 0 und kleiner als 1 sind. Nimmt man daher das Verhältniß 1 : 10 = 1, so ist das Verhältniß 1 : 1 = 0, das Verhältniß 1 : 0,1 = −1 ff.

Hieraus ergibt sich, daß die Logarithmen der ächten

Berechnung gegebener, sowie Berechnung der allerersten Berechnungsarten Logarithmen selbst.

§3.

Aus den bisher erklärten Eigenschaften ergeben sich folgende Sätze und Hülfsmittel, deren man sich bei Berechnungen dieser Art bedient:

1. Man findet den Logarithmus eines Produktes, wenn man die Logarithmen derjenigen Faktoren dieses Produktes zusammenaddirt, z. B. ab das Produkt zweier Logarithmen

$ab = \log. a. + \log. b$ ist.

2. Den Logarithmus eines Quotienten zweier Zahlen, wenn man von dem $\log.$ des Dividenden den $\log.$ des Divisors subtrahirt, oder $\log. \frac{a}{b} = \log. a - \log. b.$

3. Den Logarithmus einer jeden beliebigen Potenz, wenn man den Logarithmus der Wurzel mit dem Exponenten der Potenz multiplizirt, oder $\log. a^n = n \log. a.$

3. Man findet den Log. einer Potenz, wenn man den Log. ihrer Wurzel mit dem Grade dieser Potenz multiplizirt, und den Log. $A^3 = 3 \times \log a$.

4). Man findet den Log. einer Wurzelgröße, wenn man den Log. jener Größe, wovon die Wurzel gezogen werden soll durch den Grad der Wurzel dividirt, und den Log. der Wurzelgröße $\sqrt[n]{a}$ sucht. $\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \times \log a$.

Fällt man aber durch eine gegebene Zahl die Wurzel eines gegebenen Grades, so muß der Log. dieser Zahl durch den Grad dieser Wurzel dividirt, und zu dem erhaltenen Logarithmus die gesuchte Zahl gesucht werden, welche der erhaltene Log. der Wurzelgröße ist.

Erklärung

des

Logarithmen Systems und der logarithmischen Tafeln.

§. 1.

Das Logarithmen System von Briggs.

Da bey einem jeden vorfallenden Berechnungsgeschäfte mehrere Logarithmen Systeme gebraucht werden, die Basis der Logarithmen, deren man sich dieselben, sich jedesmal nach Verschiedenheit der Fälle mit der man zu thun hat, bestimmt, in der mannigfaltigen Verschiedenheit der Rechnungsarten, so ist es für die mehrere Bequemlichkeit, gemeiniglich das Briggs'sche System nach der Dekadischen Grösse begründet und die Grundzahl

= 1 genommen,

Henry Briggs berechnete die ersten Logarithmen Tafeln und
gab sein Werk heraus, starb im Jahre 1630 zu Oxford.
Jobst Burgi in Deutschland und Napper in Schottland waren die
ersten Mathematiker, welche die ersten Tafeln berechneten.

Nach diesen Logarithmen Systemen waren

Log. 1 = 0

Log. 10 = 1

1 " 100 = 2

" " 1000 = 3

" " 10000 = 4

" " 100000 = 5 u. s. w. und Log. 0,1 = — 1

" 0,01 = — 2

" 0,001 = — 3

" 0,0001 = — 4

" 0,00001 = — 5

" 0,000001 = — 6 Da nun gaben die Log

allen Zahlen, welche zwischen 1 und 100 ppc. und zwischen 1 und 0,000001 liegen,
zu kennen braucht, so reicht sie für die gewöhnliche Logarithmen-
Rechnung vollkommen hin. Wie kommen wir nun die Logarithmen
von allen diesen Zwischenzahlen finden, wenn sie und die Log.
Tafeln gegeben sind?

1.) Die Zwischenzahlen 1 und 10 liegt, sowie ihr Log. ohne Ausnahme Null
kleiner als 1 sein, oder mit anderen Worten, man zwischen
1: 10 einen Grundverhältniß liegt, sowie das Verhältniß
von 1: 9 und einem Theil dieses Grundverhältniß. Das gesuchte
Zwischen. Also ist Log. 9. sicherlich, also mehr als ein Theil
des Grundverhältniß 1: 10 ist das Verhältniß 1: 9 und daher
welche Zahlen von 1 bis 9 auf 9 zählt. Die Logarithmen dieser
und durch ist Log. 9.

2. Kennt man 1: e = e: 10 so ist das Verhältniß von 1: e die Hälfte
das Verhältniß 1: 10, wobei zu bemerken ist, das Brüche sie

ändere die Hälfte eines Verhältnisses bedeutet eine solche, dass
Exponent der Hälfte Exponent des ganzen, sondern das
Exponent der Quadrat-Wurzel aus dem ganzen Exponenten ist.
Demnach sind e = √10 = 3,1622777 und, so ist das Verhältniss von
1 : 3,1622777 dem halben Verhältnisse von 1 : 10 gleich und die Logarithmus
von 3,1622777 ist = $\frac{1}{2}$ = 0,5

3.) Demnach zwischen 3,1622777 und 10 alles so fortgesetzt die Progression
3,1622777 : d = d : 10 sind und d = √3,1622777 × 10 = √31,622777 =
5,6234132. Demnach Log. 3,1622777 = $\frac{1}{2}$ und Log 10 = 1 ist, sind
Log 5,6234132 = $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2}+1\right)$ = $\frac{3}{4}$ = 0,75 d. i. von 5,6234132 Log $\frac{3}{4}$ der
Grundverhältniss-Zahl von 1 : 10 das Verhältniss ist $\frac{3}{4}$ von
Einem.

Soll statt Einem das Verhältniss $10^{\frac{3}{4}}$ = 5,6234132 ist, das Verhältniss
von $10^{\frac{3}{4}}$ ist, müssen beyde Exponenten gleich seyn.

4. Nun sind die gegebenen Zahlen 5,6234132 und 10 deren
Exponenten 5,6234132 : e = e : 10, so sind e = √56,234132 =

$= 1,4989421$ und $\log. 1,4989421 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+i\right) = \frac{7}{8} = 0,875.$

5. Weil nun die Zahl 0 zwischen 10 und $1,4989421$ fällt so ist:

$10 : x = x : 1,4989421.\ x = \sqrt{14,989421}$ oder $3,6596432.$

Der ganze $\log.$ von $3,6596432 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{7}{8}\right) = \frac{15}{16} = 0,9375.$

Da die Zahl $3,6596432$ nicht für die gegebene Zahl gesetzt

werden kann, weil die Abweichung dieser Berechnung noch zu groß gesetzt

werden muß.

Auf diese fortwährend dauernde Berechnungsart diese Logarithmen

Berechnung so lange fortgesetzt werden, bis man auf eine

klein genommene Proportionalzahl fällt welche = 0,0000001

ist.

§. 3.

Aus diesen Lehrsätzen sieht man die Möglichkeit die $\log.$ aller

Zwischenzahlen darin der Bakarischen Reihe zu berechnen.

Kennziffer und Mantisse eines jeden Logarithmen.

1. In den Logarithmen bis auf 2 Decimalstellen, welche die Kennziffern berechnet sind, ist die Kennziffer der Charakteristik und die Mantisse sein Rest von der Kennziffer verschiedenen Decimalstellen.

Mantissen können bei den Logarithmen, die mehr als 2 Decimalstellen haben, nicht vorkommen, weil der Logarithmus z. B. Log. 86=1.934985 sind ~~ist~~ 1 die Kennziffer oder Charakteristik und 934985 die Mantisse.

2. Die Benennung Kennziffer oder Charakteristik kommt daher, daß man, um denselben zu finden, gewöhnlich Hülfstafeln, die Logarithmen heißen, zu Hülfe nimmt, welche diesen Logarithmus beigefügt hat.

Umgekehrt kann man bei irgend einer gegebenen Hülfstafel die

Die Charakteristik der vorgegebenen Logarithmen bestimmt sich

z. B. 8940 diese Zahl, so fällt sie zwischen die beyden 1000 und

10000 und muß daher 3 zur Charakteristik haben. Hiernach gelt

folgende allgemeine Regel:

a. Wenn eine Log. gegeben ist, so bey diese die vorgegebene

ganze Zahl durch eine Ziffer mehr als wie viele Ziffern sein

Charakteristik haben.

b. Wenn eine gegebene ganze Zahl der Log.

sinden soll, so subtrahirt sein Charakteristik eine Ziffer

weniger als wie viele Ziffern diese Zahl besitzt.

D.

Bestimung der, den gegebenen Zahlen zugehörigen Logarithmen.

1. Soll man zu der zu einer Zahl von 1–99 die

Log. finden, so sucht man diese Zahl in der Vertikalreihe

der Zahl vor sich und der zu findende Log. steht unmittelbar
unter derselben in der Kolonne „Logarithmus."

§. 2.

Um den Log. einer jeden Dezimalbruch-Zahl zu finden
welche 1, 2, 3 oder 4 Ziffern hat, muß man die gegebene Dezimalbruch
Zahl in die Tafel aufsuchen und müssen die gegenüberstehenden Dezimalstellen
sub. der Log. gesucht werden, welche gegenüber stehen, nur
bleibt zu bemerken, daß seine Kennziffer, welche niemals Einheiten
vermindert werden muß, eben die gegebene Zahl Dezimalbruch-
stellen vorkommen, z. B. Log. 0,6 = 9,9346985 Log. 0,999 = 9,9999566
Da aber 3 Dezimalstellen vorhanden sind, so muß die Charakteristik
um 3 Einheiten vermindert werden, daher Log. 0,999 = 0,9999566.

II Ist aber der gegebene Dezimalbruch einer, so suche man
zu seinen Ziffern den Log. gleichwie zu ganzen Zahlen, setze seine
Kennziffer = 0 und schreibe zur Rechten seiner Mantisse die

Anmerkung 1. 2. 3. 4 etc. zu nachstehenden Logarithmen.

Tausendtel p.c. Log. z. L. Log. 0,27115 = 0,4337698 – 1

Log. 0,048 = 0,6812412 – 2

Log. 0,001318 = 0,1199154 – 3

Log. 0,0004341 = 0,6375898 – 4

§3

Die Logarithmen jedes gemeinen Bruches, wo Zähler und Nenner Ziffern enthalten, zu finden.

Wenn man zu einem gemeinen Bruche den Log. finden soll, so ist vor Allem darauf zu sehen, ob derselbe ein ächter oder ein unächter Bruch ist.

I. Von Log. unächter Brüche findet man, wenn der Log. seines Nenners vom Log. seines Zählers abgezogen wird.

Log. $\frac{516}{67}$ = Log. 516 – Log. 67 wodurch also der Bruch

wird Log. 516 = 2,7132385

Log. 67 = 1,8260748

Log $\frac{516}{67}$ = 1,8871637.

II. Ist der gegebene Bruch ein echter oder unechter, positiver oder negativer, so verwandle den Logarithmen des Zählers, das heißt Log. negativ, wenn nöthig, machen und diesen mit dem negativen Charakter in Ziffern drucken lassen, damit aber das Vorzeichen negativ gesetzt bleibe, subtrahire davon den Logarithmen des Nenners, und die Differenz ist der Logarithmen des gegebenen Bruches.

Soll Log. von $\frac{5}{8}$ gefunden werden, so ist Log. 50 = 1,6989700
Log. 8 = 0,9030900
folglich Log. $\frac{50}{8}$ = 0,7958800 — 1

Da nun $\frac{50}{8} : 10 = \frac{5}{8}$, so muß auch Log. $\frac{50}{8}$ — Log. 10 = Log. $\frac{5}{8}$ sein
d. i. 0,7958800 — 1 = Log. $\frac{5}{8}$.

Da man aber den gegebenen Bruch $\frac{5}{8}$ in einen Dezimalbruch, somit $\frac{5}{8} = 0,625$ folglich Log. $\frac{5}{8}$ = Log. 0,625 sein.

Kustanovi nämlich den Log. von 625, so ist der selbe = 2,7958800

mann Log. 0,625 = 0,7958800 – 1

Aufgabe. Man ist Log $\frac{17}{29} = \frac{170}{29}$ = Log 170 = 2,2304489

Log 29 = 1,4623980

Daher Log $\frac{170}{29}$ = 0,7680509 und

Log $\frac{17}{29}$ = 0,7680509 – 1

II. Man ist Log. $\frac{1}{5432}$ = Log. 10000 = 4,0000000

Log. 5432 = 3,7349598

daher Log $\frac{1}{5432}$ = 0,2650402 – 4

Da man in den gemeinen Logarithmischen Tafeln nur die Decimalbrüche antrifft, so lassen sich die Log. der gemeinen Brüche und Decimalbrüche, deren Zähler 1 ist, durch folgende Regel finden.

Die Log. sind.

Aus den Logarithmen gemischter Brüche sind die nur die Decimalbrüche zu nehmen, welche ihnen zugehören

und suche die zugehörigen Log. z. L. Log. $9\frac{5}{8}$ = Log. $\frac{77}{8}$ =

Log 77 = 1,8864907
Log 8 = 0,9030900
Log $\frac{77}{8}$ = 0,9834007

S. 4.

Von Logarithmus jeder ganzen oder gebrochenen Zahl von 5—7 Ziffern zu finden.

1. Um diese Hülfe der Log. Tafeln die Log. von 5, 6 und 7 stelligen Zahlen zu finden, merke man folgenden Hülfssatz: Wenn man von einer Zahl die unmittelbar vorhergehende Zahl subtrahirt, so ist der Unterschied der Logarithmen dieser beiden Zahlen die Log. Function der Zahl, welche zwischen beiden Zahlen in der Mitte steht, d. h. der Unterschied der Log. der kleinsten und der Log. der mittelsten Zahl ist gleich dem Unterschied der Log. der mittelsten und der Log. der größten Zahl, wenn diese Zahlen Differenzen von einander sind, welche sich wie 1 : 1 verhalten, d. h. welche um gleich viel von einander verschieden sind. Die Richtigkeit dieses Satzes soll durch Einschaltung mehrerer Zahlen erwiesen werden. Einsz. z. Log. 7634 = 3,8827522
Log. 7633 = 3,8826953
Log. 7632 = 3,8826384 daraus die

Logarithmische Differenz der 2ten und 3ten Zeile = 0,000569

" " 1ten und 3ten " = 0,000138

Folglich hat man der Proportion 1 : 2 = 0,000569 : 0,000138.

2. Multiplicirt. Da der Log. 7628 gefunden werden soll, so dividire

man diese Zeile durch 10 wodurch sie = 762,8 wird und diese

größer als 762 und kleiner als 763 ist, daß man dann

Log. 762,8 größer als Log. 762 und kleiner als Log.

763 seyn. Hiernächst Log. 763 = 3,8860957

Log 762,8 soll gefunden

Log. 762 = 3,8860393.

Demnach verhält sich die Differenz wie die Differenzzahl

seiner zugehörigen Logarithmen deshalb setze man

1 : 0,8 = 3,8860957 — 3,8860393 : x.

1 : 0,8 = 0,0005564 : x

x = 0,0005564 x 0,8 = 0,0004512.

Wird nun diese logarithmische Differenz zum Log. 762,8

addirt, nun lief Log. 7692 = 3,8860293
die Log. Diffz. = 0,0000451
Folg. Log. 7692,8 = 3,8860844 und folglich
Log 76928 = 4,8860844.

Zur Auflösung vorgl. Aufgaben dienen folgende

Regeln.

1. Man nehme die Zahl deren Log. man sucht aus 5, 6 oder 7 Ziffern bestehet, lasse die andern von der rechten zur linken stets Ziffer ab, das Ziffer zur linken nimmt man mit 1 Ziffer bestehen.

2. Diese Ziffern Zahl suche man in den Tafeln auf zu welcher Log. man den Log. der übrigen Ziffern und bemerke die Differenz wenn die Stellen der letzten Ziffern aufsteigen. Folgende

Lehrsätze.

3. Stehen mehrere Ziffern dieser Differenz mit den, wie oben angegeben abgeschnittenen Ziffern, und machen sie 5 Ziffern, von der rechten zur linken stets, als neue N. 1. abgeschnittene Ziffern die letzten dieser mit zusammen

ab. ist, somit dimindrigen der Schnurbleibmaßen
1 zusammen.

b. Man nun die in sub. No. 3 angestellten Fixsterne zu den mit-
tägigen Durchgangs Zeiten des Log. der mittl. Schwingungsbleibmaßen b
zeitigen Stunden sieht, so gibt diese Linie die Maßstäbe des
gesuchten Log, welches man nun noch die gesuchten Eigenschaften sich
beizulegen. — z. B. Stern Log. 6837.5 ?

1) I^te Regel zu 6837/5

II^te Regel Log. 6838 — Log. 6837 = 3,8349291 — 3,8348656 = 635

III^te Regel. 635 x 5 = 3175

IV^te Regel. Log. 6837 = 3,8348656
317
4,8348973 mithin Log 6837/5 =

= 4,8348973.

---

2) I^te Regel. 1783/4

II^te Regel. Log. 1784 — Log. 1783 = 3,2513949 — 3,2511573 =

= 2436.

III^te Regel. $\frac{2436}{974}$ (2436 x 4)

IV^te Regel Log. 1783 = 3,2511573
974
4,2512487 = Log. von 17834

Wenn nun gegeben die Grundlinie AC, die Höhe CB, und der Winkel ACB, und man soll finden, wenn jede der mitgegebenen Höhenlinien CD, CE, CF, CG, CH, CI, CK, CL, CM, CN, CO, CP, CQ, CR, CS, CT, CU, CV, CW, CX, CY, CZ, Ca, Cb, Cc, Cd, Ce, Cf, Cg, Ch, Ci, Ck, Cl, Cm, Cn, Co, Cp, Cq, Cr, Cs, Ct, Cu, Cv, Cw, Cx, Cy, Cz, CA, CB, CC,

Bestimmung der den gegebenen Logarithmen zugehörigen Zahlen.

§. 1.

Die einem Log. zugehörige Zahl durch die Logarithmen zu finden:

1). Die Aufgabe, zu einem gegebenen Log. die gesuchte Zahl zu finden, ist die umgekehrte, wenn die Logarithmen-Tafeln vorhanden sind, und es genug ist, eine nur annähernde Richtigkeit für die gesuchte Zahl zu finden, welche als Probe-Exempel gebraucht werden kann.

2). Wenn ein gegebener Log. aus allen Ziffern seiner Mantisse genommen, den Logarithmen gefunden wird, so ist die dabey stehende Zahl diejenige, welche wenn man in Log. nach die Charakteristik des gegebenen Log. gesetzt

Log 3,464-3405 gibt Zahl 2913
Log. 3,4811559 " " 3028
Log 0,950 7055 " " 8927
Log. 2,6537912+2 " " 0,04506
Log 0,7820424-5 " " 0,0000 6054

Sind die anwachsenden, in absteigender Folge, sämtliche Ziffern
der Mantissen nicht gleich, in der Tafel, so suche man die zunächst
kleinere Mantisse derselben und nehme die zu dieser gehörige
Zahl, so ist solche, mit der vorgegebenen Charakteristik
vollständig.

Log. vorgegeben. Gesucht. Log. zum Log. 2,7225389 die zunächst
kleinere Mantisse 0,7225517 ist die Tafel, bei welcher die Zahl
5279, steht. Daher wird die zu suchende Zahl zwischen
5279 und kleinerer 5280 seyn.

Da nun sich bei jeder 0,9 stehen Ziffern, so wird die gesuchte
in dieser Folge zwischen den vorgegebenen Ziffern
stehen.

Nun wird der vorgegebene Log. 2,8629087, gefunden in der
Tafel 2,8629062 als jener, dessen Mantisse die zunächst
kleinere ist. Da nun zwischen die Zahl 1293 ge-
hört, so ist die zu suchende Zahl = 1293, welche man findet

um 0,09 Fehler kann.

Wenn der gegebene Log. 0,9761724, so findet man in den Tafeln die nächst kleinere Zahl 0,9761666 wozu die Zahl 466 gehört, deren dazugegebene Log. genau die Zahl = 466, wobey der Fehler kaum 0,0009. —

Wenn der gegebene Log. 0,5873898 – 3, so müssen in den Tafeln die nächst kleinere Log. seyn = 0,587342, dann die Zahl 386 beygesetzt. Diese müssen jedoch noch mit einer Ziffer multiplicirt werden, welche in diesem Falle in dem gegebenen Log. nachstehende Ziffer = 0,003867.

§. 2.

Die den gegebenen Logarithmus zugehörigen Zahlen in 56 Ziffern zu finden.

1. Zur Auflösung dieser Aufgabe dient der bereits obenangeführte Hülfssatz, das 3te, 4te, 5te und 6te Ziffern die Differenzen der Log., wie die Differenzen der nächstangesetzten Zahlen

wenn alsdann Nachstehende Logarithmen die Anwendung dieses Satzes
verschaffen:

Welche Zahl Logarithm hat Log. 1,5827593?

„Wird diese Mantisse in der Tafel aufgesucht und zwar mit den
Ziffern 3, so findet sich zunächst kleinere 3,5827450 und die
zunächst größere 3,5827585. Letztere mit der Logarithmischen
Differenz, so ist die Differenz der größeren und kleineren
Mantisse = 0,5828585 größere Mantisse
0,5827450 kleinere „
0,0001135 = tabellarische Log. Differenz

Auf gleiche Weise ist 0,5827593 = gegebene Mantisse
0,5827450 kleinere
0,0000143 = 2te Log Differenz

Da nun zur größeren Mantisse die Ziffer 3827 und zur kleineren
Mantisse 3826 gehören, welche nächste mit einander sind, so bleibt
nun die Frage übrig:

1te Diff. 2te Diff.
0,0001135 : 0,0000143 = 1 : x.

$$x = \frac{1 \times 0{,}0000143}{0{,}0001135} = \frac{0{,}0000143}{0{,}0001135} = 0{,}125,$$ daher sind die den

gegebenen Maschine zugehörigen Ziffer dieser: 382125.

Lese ab die gegebene Anzahl der Umdrehungen Log.

= sind, so wird die zu derselben gehörige Zahl = 38,2125.

Aus dieser Auflösung lassen sich zum [illegible] gemachten

Gebrauche folgende Regeln stellen.

a. Man zähle von der gegebenen Maschine die zunächst

kleinere in der Tafel ab und bemerke somit die in

zur Rechten gehörigen 4 Ziffern als Zähler die folgende.

Logarithmische Differenz.

b. Man zähle ebenfalls die zunächst kleinere Maschine

nach der gegebenen in die Tafel ab, und bemerke

sich ebenfalls

c.) Von dem die mit der in b. erhaltenen

Differenz in die nächst erhaltene kleinere und be-

sich findende 3 Ziffern der Addenten.

d.) Endlich setze man diesen die eigentümlichen 3 Ziffern

zum Beschluss das in Anschaltung gebrachte Zeichen und bestimme nach den Kennzeichen das gegebene Log. die ganzen und die Decimalstellen, welche die dazugehörigen Zahlen haben.

Beispiele.

Das [illegible] gegebene Log. 0,5338426.

I^te Regel. 0,5338426 gegebene Mantisse
0,5386994 ähnliche " " correspond. Zahl d. Coll. 3457.
0,0000432 = 1ten Log. Differenz

II^te Kgl. gegebene Mantisse 0,5338250
ähnliche " 0,5386994
0,0001256 = 2ten Log. Differenz

III^te Kgl. Diff. der ähnlichen Mantiss. 432/1256 = 0,344
Diff. der gegebenen

IV^te Regel 344 × 57 = 19608 = der dem gegebenen Log. entsprechenden Zahl.

II

Welche Zahl ist gesucht wenn Log. 2,4518794.?

I. R. 2,4548794 gegebene Mantisse
2,4547864 Numerus "
1,0000930 = 1te Log. Differenz

II. te R. 0,4519399 gesuchte Mantisse
0,4547864 Numerus
0001535 = 2te Log. Differenz

III. R. $\frac{930}{1535} = 0,605$

IV. R. 283,0605 = Die, die gesuchte Log, nächstgrößere Zahl.

III

I. R. 0,8374965 — 2 gegebene Mantisse
0,8374622 Numerus
0,0000343 = 1te Log. Differenz

II. te R. 0,8375253 gesuchte Mantisse
0,8374622 Numerus
0,0000631 = 2te Log. Differenz

III. R. $\frac{343}{631} = 0,543$

IV. R. 6878543 = 0,6878543.

Einige Anwendungen von der Logaritmen Rechnung.

§. 1.

Wann man durch Hülfe der Log. gesuchte Progressionalzahlen finden soll, so kommen 2 Hauptfälle in Betracht:

a. Wo 3 gegebene Zahlen die 1te 2te 3te der Progressionalzahl zu finden sind

b. Wo 2 gegebene Zahlen mit 1 oder mehr gesuchten Progressionalzahl zu finden,

Um die erste Aufgabe zu lösen, kann man, wenn man das Verhältniß der gegebenen Zahlen kennt, oder wenn man

Denn soll man, wenn das Verhältniß der Log. der gegebenen Zahlen bekannt ist, die gesuchte Zahl finden.

Soll der Logarithmus der Zahl 45, somit Basis die Zahl
der Numerus die Zahl sein, von der der Logarithmus der Zahl 45 der
mit dem Numerus 9367 : 4134 = 45 : x, zu der Zahl aber die gesuchte
Zahl x heißen, welche der Logarithmus 45 ist.

z. L. 9367 : 4134 = 45 : x

Log. x = Log. 4134 + Log 45 — Log. 9367 wenn

Log. 4134 = 3, 6163705

Log. 45 = 1, 6532125 folglich wenn

Summa = 5, 2695830

Log. 9367 = 3, 9716005

1, 2979825 mögen die Zahl 19, 86015 ge-

funden.

Anmerkung. Da die Logarithmen der Zahlen die mit allen geometrischen
Progressionen zu finden, der Logarithmus aber nur ganze und die
Log. der Zahlen ganze Zahlen sind, so können die
Zahlen selbst nur zu diesen Logarithmen die
ganzen Zahlen sein, so ist das, das zu finden
Quotienten geometrische Progressionen sind.

3. L. $g : x = x : g5$

$x^2 = g \times g5$

$x = \sqrt[2]{g \times g5} =$ Log. $x = \frac{\text{Log. } g + \text{Log. } g5}{2}$

Log. $g = 0,9541425$

Log. $g5 = 1,9777236$ folglich

Summa $\frac{2,9319661}{2} = 1,4659830$ wozu die Zahl 29,24 gehört,

d. s. nach der gegebenen Log.

§. 2.

Wurzel Ausziehungen durch Hülfe der Logarithmen.

Wenn wir eine gegebene Zahl, wie die 5te Wurzel durch Hülfe der Log. ausfindig machen soll, so suche man von allen den Log. diese Zahl, dividire diesen durch den Grad der auszuziehenden Wurzel und suche sodann die nächstgehörende Zahl des Quotienten, welche die verlangte Wurzel sein wird.

Man sieht $\sqrt[2]{5154}$.

$\log. 5154 = \frac{3,7121444}{2} = 1,8560722 = 71,79$.

Dieser 71,79 = Der 2ten Wurzel aus 5154.

Man sieht $\sqrt[3]{3318}$.

$\log. 3318 = \frac{3,5208764}{3} = 1,1736254 = 14,91 =$ Der Zahl der dritten Wurzel aus 3318.

Fernere Beyspiele.

1.) $\sqrt[3]{35246} = 32,69$

2.) $\sqrt[12]{567348} = 3,016$

3.) $\sqrt[5]{\frac{13}{16}} = 0,9819647$

4.) $\sqrt[3]{15705\frac{2}{9}} = 26,06$

5.) $\left(\frac{9}{8}\right)^{21} = 11,863$

6.) $\left(\frac{25}{6}\right)^{9} = 14766,35$

BUCHSTABEN

RECHNUNG

mit

BRÜCHEN.

Verfahren

ungleichartige Brüche gleichartig zu machen.

Um ungleichartige Brüche gleichartig zu machen, muß man den Zähler und Nenner des ersten mit dem Produkte aus den Nennern der folgenden und den Zähler und Nenner des zweiten mit dem Produkte aus dem Nenner des ersten und den folgenden u. s. f.

$\frac{a}{b}$ u. $\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd}$ u. $\frac{cb}{bd}$ multipliziren, wodurch die Brüche gleichartig sind.

Wären $\frac{c}{d}, \frac{n}{m}$ u. $\frac{r}{p}$ die gegebenen Brüche, so wird $\frac{c}{d} = \frac{cmp}{dmp}$,

$\frac{n}{m} = \frac{ndp}{dmp}$ u. $\frac{r}{p} = \frac{rdm}{pdm}$ wodurch diese Brüche ebenfalls gleichartig sind.

Wären $\frac{a+b}{c}$ u. $\frac{d-r}{p}$ die gegebenen Brüche, so wird

$\frac{a+b}{c} = \frac{(a+b)p}{cp}$ und $\frac{d-r}{p} = \frac{(d-r)c}{pc}$, wodurch sie ebenfalls gleichartig sind.

Addition in Buchstabengrossen.

Sind die Brüche $\frac{a}{b}$ u. $\frac{c}{b}$ zu addiren, so nimmt man nur einen der beiden Nenner b, setzt nur, und schreibt die Summe $= \frac{a+c}{b}$ gibt.

2. $\frac{x}{d} + \frac{n}{m} + \frac{r}{p} = \frac{cmp}{dmp} + \frac{ndp}{dmp} + \frac{rdm}{pdm} = \frac{cmp+ndp+rdm}{dmp}$.

3. $a + \frac{c}{d} + p + \frac{n}{m} = \frac{ad+c}{d} + \frac{pm+n}{m} = \frac{(ad+c)m}{dm} +$

$\frac{(pm+n)d}{md} = \frac{(ad+c)m+(pm+n)d}{dm}$.

Subtraction in Buchstabengrossen.

Sind von den Brüchen $\frac{a}{b}$ den Bruch $\frac{c}{b}$ zu subtrahiren, so nimmt man den Nenner b gemeinschaftlich, und schreibt die Differenz der zwei Zähler, setzt nur, welches $\frac{a-c}{b}$ gibt.

2. $\frac{d}{c} - \frac{b}{a} = \frac{da}{ca} - \frac{bc}{ca} = \frac{da-bc}{ca}$.

3.) $\frac{d+a}{b} - \frac{r}{p+q} = \frac{(d+a)(p+q) - br}{b(p+q)}$.

4. $a - \frac{b}{d} = \frac{ad-b}{d}$.

5. $b - \frac{c}{r+p} = \frac{b(r+p)-c}{r+p}$.

6. $\frac{a}{n} - b = \frac{a}{n} - \frac{bn}{n} = \frac{a-bn}{n}$

7.) $b + \frac{c}{d} - \left(p + \frac{n}{m}\right) = \frac{bd+c}{d} - \frac{pm+n}{m} = \frac{(bd+c)m - (pm+n)d}{dm}$

Multiplication in Buchstabengrößen.

Der Zähler $\frac{b}{d}$ wird mit a multiplizirt, man muß dessen Zähler mit a multiplizirt oder seinen Nenner durch a dividirt. Demnach gibt $\frac{ab}{d}$ dieselbe Zahl $\frac{b}{d:a}$.

$\frac{a+b}{c-d} \times d = \frac{(a+b)d}{c-d} = \frac{ad+bd}{c-d}$.

Um 2 Brüche mit einander zu multiplizieren muß man die Zähler und dann Zähler und Nenner und Nenner mit einander multiplizieren. D. h. Z. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

2. $\frac{b+d}{a} \times \frac{b-d}{n} = \frac{(b+d)\times(b-d)}{an} = \frac{b^2-d^2}{an}$.

4) $\frac{p}{q} \times \frac{n}{m} \times \frac{c}{d} = \frac{pnc}{qmd}$.

5) $\frac{b-d}{a+c} \times \frac{h}{g} = \frac{(b-d)h}{(a+c)g}$.

6) $\left(b+\frac{a}{d}\right) \times \left(1+\frac{n}{m}\right) = \frac{bd+a}{d} \times \frac{m+n}{m} = \frac{(bd+a)\times(m+n)}{dm}$.

Division mit Buchstabengrossen.

Ein Bruch $\frac{a}{m}$ wird durch a dividirt, wenn man

entweder seinen Zähler mit a dividirt oder

dessen Nenner mit a multiplizirt. Somit

gibt $\frac{a:a}{m}$ oder $\frac{a}{am}$.

2. $\frac{a}{b} : (c+d) = \frac{a:(c+d)}{b}$.

$\frac{ab}{q} : b = \frac{a}{q}$.

3) Damit man ganze Zahlen mit einem Bruch dividirt

werden, so muss man sie mit dem ungekehrten

Bruche multiplizieren, z. B. $b : \frac{n}{m}$ $b \times \frac{m}{n} = \frac{bm}{n}$

$$a : \frac{b-c}{d} = a \times \frac{d}{b-c} = \frac{ad}{b-c}.$$

$$b : \frac{h}{d+c} = b \times \frac{d+c}{h} = \frac{b(d+c)}{h}.$$

Zwei Bruchzahlen werden dividirt, wenn man den Dividenden mit dem Divisor verkehrt multiplizirt.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

$$\frac{b+d}{n} : \frac{a-d}{m} = \frac{b+d}{n} \times \frac{m}{a-d} = \frac{(b+d)m}{(a-d)n}$$

$$\frac{a+b-c}{d} : \frac{h+r}{g} = \frac{(a+b-c)}{d} \times \frac{g}{(h+r)} = \frac{(a+b-c)g}{(h+r)d}.$$

$$\left(b+\frac{c}{d}\right) : \left(r+\frac{n}{m}\right) = \frac{bd+c}{d} : \frac{rm+n}{m} = \frac{bd+c}{d} \times \frac{m}{rm+n} =$$

$$\frac{(bd+c)m}{(rm+n)d}.$$

VERHÄLTNISS

Verhältniss-Lehre
in
Buchstabengrössen

Der allgemeine Ausdruck eines Verhältnisses ist:
$a - b = d$ wenn a das 1te Glied, b das 2te Glied u. d den Unterschied bedeutet. Wenn d grösser als b oder $a = b$ oder d kleiner als b ist, so heißt das Verhältniss wenn Grössen zum Kleinern oder Verhältniss wenn Gleichheit oder wenn Kleinern zum Grössern.

Die jüngere Art ist $a = b + d$ und $b = a - d$.

Die allgemeine Formel der geometr. Verhältnisse ist:
$a : b = c$ wo a das erste Glied, b das 2te und c der Exponent ist, welcher anzeigt wie vielmal grösser oder kleiner als 1 ist, ein jeder a gegen b oder b gegen a genommen wird.

Zusätze. 1) $a = \frac{b \times c}{c}$ u. $b = \frac{a}{c}$, so daß Bücher den Preis eines Gliedes von der Grundreihe und den Preis eines Gliedes von der Grundreihe das 1ten und das 1ten Gliedes gefunden werden kann.

§. 24.

Allgemeine Sätze der arithmetischen Proportion.

Wenn $a - b = d$ u. $m - n = d$ ist, so sind die Differenzen von $a - b$ u. von $m - n$ einander gleich; die nähere Bestimmung dieser Differenz d findet sich, wenn in der arithmetischen Proportion ist: $a - b = m - n$ oder auch $n - m = b - a$.

Da in dieser Proportion ist $a + n = b + m$. Denn da die zusammengesetzte Differenz d findet, so ist $a = b + d$ u. $m = n + d$. Daher wird die Proportion dieser $(b + d) - b = (n + d) - m$, wenn die Zeichen der beyden

wüßen Cylinder = (b+d)+m = b+(n+d.

Rechnerisch Beispiel. Wie lange muß ein Faden sein, daß Einwickung ihm so viele Cylinder als einer Cylinder sein einzige umwandelt werden?

Wenn c − d = a − x so wird x = d + a − c sein.

Wie a − b x − d, wird x = a + d − b.

Ferner x − x = l − h, so ist x = x + h − l.

Allgemeine Sätze der geometrischen Proportion.

Wenn a : b = c : d. m : n = c : d so sind diese Verhältnisse einander gleich und geben folgende Proportion.

a : b = m : n

Wenn a : b = m : n ist, so muß auch a n = b m sein.

Wenn das Verhältniß a : b als dann Quotienten $\frac{a}{b}$ und das Verhältniß m : n dann Quotienten $\frac{m}{n}$ gleich.

Also wird $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

Werden diese Brüche gleichnamig gemacht, so ist $\frac{an}{bn} = \frac{bm}{bn}$ und folglich $an = bm$, der gleiche Brüche, wenn sie gleiche Nenner haben, müssen gleiche Zähler haben.

Sey $a : b$ ein geometrisches Verhältniß, so heißt

$$a : b = ad : bd = adq : bdq = \frac{a}{n} : \frac{b}{n} = \frac{a}{n \times m} : \frac{b}{n \times m}.$$

Sey $a : d = h : q$, so heißt $a : h = d : q$, denn a. h sind die gleichvielfachen von d. und q.

Die Proportion $\frac{a}{n} : \frac{b}{m} = \frac{d}{c} : \frac{h}{q}$ verbindet die Multiplikationsverhältnisse mit allen gleichen Gliedern, woraus folgende mannigfaltige Verhältnisse entstehen. $a : \frac{bn}{m} = d : \frac{h}{q}$ oder $am : bn = d : \frac{h}{cq}$ oder $am : bn = \frac{dq}{c} : h$ oder $am : bn = dq : ch$,

Wenn die Proportion $a : b = c : d$

$$e : f = p : q$$

zugegeben sind, so ist $ae : bf = cp : dq$, welches man die zusammengesetzte Proportion nennt.

Addition und Subtraction in Wurzelgrößen.

Wenn zu übrigens gleiche Größen die Wurzelgrößen
von gleichem Grad sind, so sind die Wurzelgrößen z. B. $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$. $\sqrt[n]{m}$ etc.
Jede gegebene Wurzelgröße kann durch eine Potenzgröße
dargestellt werden, welche einen gebrochenen, der Größe nicht
Lauter gegenüberstehenden Wurzelgrößen sind, z. B. $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$;
$\sqrt[3]{b} = b^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{ab} = ab^{\frac{1}{2}}$.

Wurzelgrößen sind gleichartig, wenn die zugehörigen
Wurzelexponenten gleich sind. z. B. $\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[5]{\frac{b}{d}}$, $\sqrt[5]{mn}$ und
$\sqrt[7]{b}$, $\sqrt[7]{ax}$. etc.

Ungleichartig sind sie aber, wenn die Wurzelgrade verschieden
sind. z. B. $\sqrt[3]{a}$ $\sqrt[7]{a}$. $\sqrt[7]{b}$ $\sqrt[m]{b}$. etc.

Um ungleichartige Wurzelgrößen gleichartig zu machen
wandelt man sie in Potenzgrößen und gebraucht
gegenwärtiges, macht diese gleichartig und bildet nun
aus diesen neuen Potenzgrößen wieder neue Wurzelgrößen
gehörenden Grades.

Erfolgt gegeben $\sqrt[3]{a}$ u. $\sqrt[2]{a}$, so ist $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ u. $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

Bringt man diese Brüche $\frac{1}{3}$ u. $\frac{1}{2}$ auf gleichnamige Benennung so wird $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ u. $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ folglich ist nun $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{2}{6}}$ u. $a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}}$.

Also wird $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{2}{6}}$ u. $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{3}{6}}$, man drückt beyde Wurzeln gebrochenzahlig so aus, daß beyde $\frac{2}{6}$ u. $\frac{3}{6}$ werden, da $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{a^2}$ u. $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{a^3}$.

Auf gleiche Weise kann man auch 3 dergleichen Wurzeln gebrochenzahlig machen.

$4.\sqrt[3]{a} + 3.\sqrt[3]{a} = 7.\sqrt[3]{a}$

$a.\sqrt{b} + c.\sqrt{b} = (a+c).\sqrt{b}$

$6.\sqrt[n]{a} + c.\sqrt[n]{a} - d.\sqrt[n]{a} - h.\sqrt[n]{a} = (6+c-d-h).\sqrt[n]{a}$.

$8.\sqrt[n]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 4\frac{1}{2}:\sqrt[3]{2} = (8+3-4\frac{1}{2}).\sqrt[3]{2} =$

$= (11 - 4\frac{1}{2}).\sqrt[3]{2}) = 6\frac{1}{2}.\sqrt[3]{2}$.

$$\begin{array}{r} 3.\sqrt{5} - 4.\sqrt[3]{a} + 7.\sqrt[n]{b} - 11.\sqrt[n]{g} + 5.\sqrt{7} \\ -\ 5.\sqrt{5} + 3.\sqrt[3]{a} - 5.\sqrt[n]{b} - 3.\sqrt[n]{g} + 2.\sqrt{7} \\ \hline 6.\sqrt{5} - 5.\sqrt[3]{a} - 3.\sqrt[n]{b} - 8.\sqrt[n]{g} - 4.\sqrt{7} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +4.\sqrt{5} - 6.\sqrt[3]{a} - \sqrt[n]{b} \quad \times \quad +2.\sqrt{7} \end{array}$$

Subtraction.

$18.\sqrt{7} - 4.\sqrt{7} = 14.\sqrt{7}$

$5.\sqrt[n]{a} - 7\sqrt[n]{a} = -2.\sqrt[n]{a}$

$a.\sqrt[n]{b} - c.\sqrt[n]{b} - (a-c).\sqrt[n]{b}$

$36.\sqrt[n]{a^2} - 26.\sqrt[n]{a^2} = 6.\sqrt[n]{a^2}$

I. $+12.\sqrt{3} - 4.\sqrt{7} + 3.\sqrt[5]{6} - n\sqrt{a} + \sqrt{7}$

$\underline{\pm 7.\sqrt{3} \pm 2.\sqrt{7} \mp 7.\sqrt[5]{6} \pm 3.\sqrt{a} \mp \sqrt{7}}$

$+5.\sqrt{x3} - 6.\sqrt{7} + 10.\sqrt[5]{6} - (n-3).\sqrt{a} + 2.\sqrt{7}$

II. $+3.\sqrt[n]{a} - 5.\sqrt[m]{6^2} + 2.\sqrt{d} - \frac{1}{3}.\sqrt[n]{p} + \sqrt[0]{\frac{5}{4}}$

$\underline{\mp 8\sqrt[n]{a} \pm 12.\sqrt[m]{6^2} \mp 2.\sqrt{d} \pm 4.\sqrt[n]{p} + 6\sqrt[3]{\frac{5}{4}}}$

$+11.\sqrt[n]{a} + 7.\sqrt[m]{6^2} + 3\frac{2}{3}.\sqrt[n]{p} - 5.\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$

6. Wenn a eine gesetzte Zahl bedeutet so ist $\sqrt{-a}$ eine unmögliche Größe, weil in das Quadrat, so auch das eine gesetzten oder negativen Größe jedesmal gesetzt seyn muß. Da nun $\sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1}$ so stellt $\sqrt{-1}$ in der unmöglichen Größen.

Im Allgemeinen kann man bemerken, daß sich alle imaginären Größen auf die Form a+b.√−1 bringen lassen, worin a u. b wirkliche Größen bedeuten.

Addition

10.√−a
3.√−a
5.√−a
18.√−a.

a.√−d + b.√−d + c.√−d = (a+b+c).√−d.

Subtraction

10.√−a weniger 7.√−a gibt zum Reste 3.√−a.

a.√−d − b.√−d = (a−b).√−d.

3.√−4 − (√−25) + 4.√−9 = 13.√−1 heißt

3.√−4 = 3.√4.√−1 = 6.√−i sowie auch

√−25 = √25.√−i = 5.√−i u. endlich

4.√−9 = 2.√9.√−1 = 12.√−1. Demnach der ganze Ausdruck =

6.√−i − 5.√−1 + 12.√−1 = 18.√−i − 5.√−1 = 13.√−1.

Lemais

Multiplication und Division in Wurzelgrossen.

$3.\sqrt{7} \times 4.\sqrt{8} = 12\sqrt{56}$. / $2.\sqrt{5} \times 3.\sqrt{5} \times 10.\sqrt{5} = 60.\sqrt{5^3}$.

$a.\sqrt{b} \times d.\sqrt{c} = (a.d).\sqrt{bc}$

$3.\sqrt[n]{a} \times 2.\sqrt[n]{b} \times 8.\sqrt[n]{c} = 48.\sqrt[n]{abc}$,

Findet aber in Wurzelgrade verschiedener Exponenten statt, so müssen sie zuvor gleichnamig und machsam wieder.

$3.\sqrt[m]{7} \times 4.\sqrt[n]{5} = 3.\sqrt[mn]{7^n} \times 4.\sqrt[mn]{5^m} = 12.\sqrt[mn]{7^n.5^m} = 12\sqrt[mn]{7^n.5^m}$.

Dem Wurzelgrade kann nichts nützen zu dividiren, wenn selber nämlich Wurzelgrade haben, dividirt man die Zahl und machen Wurzelgrösse nach den Grade des dividirenden durch jenen des dividirten. z. B. $12.\sqrt{a^3} : 3.\sqrt{a} = \frac{12}{3} \times \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a}} = 4\sqrt{\frac{a^3}{a}} =$

$= 4.\sqrt{a^2} = 4.a.$

$m.\sqrt[n]{a^p} : n.\sqrt[q]{d^q} = \frac{m}{n} \times \frac{\sqrt[n]{a^p}}{\sqrt[q]{d^q}} = \frac{m}{n} \times \sqrt[nq]{\frac{a^p}{d^q}} = \sqrt[nq]{\frac{a^p}{d^q}}$.

Wenn die Wurzelgrade verschieden sind müssen sie zuvor gleichnamig und machsam wieder werden z. B.

$\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{6} = a^{\frac{1}{m}} : 6^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{mn}} : 6^{\frac{m}{mn}} = \sqrt[n]{a^n} : \sqrt[m]{6^m} = \sqrt[6]{\frac{a^n}{6^m}}.$

$\sqrt[3]{7} : \sqrt[2]{5} = 7^{\frac{1}{3}} : 5^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{2}{6}} : 5^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{7^2} : \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{\frac{7^2}{5^3}} =$

$= \sqrt[6]{\frac{49}{125}}.$

Multiplication und Division in eingebildeten Groessen.

1. $\sqrt{-a} \times 4. \sqrt{-a} = 7. 4. \sqrt{-a} = -28. \sqrt{a^2} = -28a.$ Denn

1. $\sqrt{-a} = 1. \sqrt{a}. \sqrt{-1}$ u. $4. \sqrt{-a} = 4. \sqrt{a} : \sqrt{-1}.$

$\sqrt{-ab} : \sqrt{-a} = \sqrt{-b}.$

$b. \sqrt{-1} : c. \sqrt{-1} = \frac{b}{c}.$

$1 : \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$

$a : b. \sqrt{-1} = -\frac{a}{b} . \sqrt{-1}.$

L. LEHRE

von den

GELEICHUNGEN

L. KEILHAU.

1820

Von Gleichungen.

Es ist bekannt, daß die numerische Größe einer Quantität mehrerlei Quantitäten entsprechen kann, so z. B. die Zahl 24 als die Summe von 16 und 8 oder als das Produkt von 3 in 8 oder als das Produkt von 12 in 2 oder 16 in 1½ oder 48 in ½ u. s. w. Durch Zusammensetzung kann daher diese Zahl mehrere verschiedene Werthe bekommen.

Durch eine Gleichung übersieht man alle diese verschiedenen Beziehungen und dasselbe Gesetz der verschiedenen (mehrfachen) Summe, wonach sie vorgenommen, da jede Gleichung 2 Seiten haben muß, wovon jede mehrfache, daß jede dieser Seiten mehrere Glieder haben kann.

Da nun die Quantitäten Größenzeichen mit den bekannten und die unbekannten aber mit den letzten Buchstaben des Alphabets zu bezeichnen gelegt, so sind die in einer Gleichung vorhandenen bekannten und unbekannten Glieder leicht zu bestimmen.

Jeder Gleichung $ax+by=c$ entspricht eine gerade Linie, und jeder Punkt der Ebene hat eine Abscisse x und eine Ordinate y. Wenn man die Gleichungen zweier Geraden kennt, so kann man die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes finden, welche ja den beiden Gleichungen zugleich genügen müssen. Die durch zwei Gleichungen gegebenen Geraden schneiden sich, wenn sie nicht parallel sind, in einem Punkte, dessen Coordinaten den beiden Gleichungen zugleich genügen müssen. Sind die Geraden parallel, so ist entweder keine Lösung möglich, oder die beiden Gleichungen sind nur verschiedene Formen derselben Gleichung.

Zwischen zwei Punkten lässt sich eine gerade Linie, aber nicht mehr als eine ziehen, und ebenso kann durch zwei gegebene Punkte nur ein Kreis gelegt werden, während durch drei gegebene Punkte im Allgemeinen kein Kreis gelegt werden kann. Die Gleichungen zweier Kreise haben gemeinsame Lösungen, welche ja den beiden Gleichungen zugleich genügen müssen. Die Gleichungen sind, sowohl die beiden, als auch die beiden, welche den beiden Gleichungen zugleich genügen müssen, sind die beiden gemeinsamen Punkte, in welchen sich die beiden Kreise schneiden. Sind die beiden Kreise nicht parallel, so ist entweder keine Lösung möglich, oder die beiden Kreise sind nur verschiedene Formen derselben Gleichung.

Zahlenbeispiele.

Die Schätzungen der 2ten Hand des Fußbonitirungsgrades
wird der 3ten Hand sein.

Ebenso seien die Schätzungen von 4ten, 5ten, 6ten p. p.
Hand wie folgen.

Schätzungen von Fällen der Schätzungen als den zunächst
Schätzungsgrund.

Ebenso ist der Fußbonitirte Schätzungsgrad 2ten, 3ten, 4ten p. p.
Hand.

Die Fälle der Schätzung, wo noch Schätzung des Fußbekannten
Grades des Tabaks ist, bestimmt jedesmal den Grad der Schätzung.

Durch die Fußgradation Schätzungsgrade des Fußbekannten
Quadrate des Tabakkommunen, sich der Tabakkommune selbst
nähern wird, so ist der Fußgradation Schätzung
nicht nöthig.

Kann aber nach dem Quadrate des Tabakkommunen
sich Tabakkommune selbst nicht adressiren, so kann
es so nicht nöthig sein, der Fußgradation Schätzung.

Lehrsätze zu den Gleichungen.

Der Satz, dass eine Gleichung, welche eine unbekannte Größe enthält, nicht mehr wahre Wurzeln haben kann, als der Grad ihrer höchsten Potenz anzeigt, ist bereits bewiesen worden.

Ferner ist auch bewiesen worden, dass eine Gleichung, welche eine unbekannte Größe enthält, wenigstens eine wahre oder eingebildete Wurzel haben muss.

Hieraus folgt nun, dass eine Gleichung, welche eine unbekannte Größe enthält, wenigstens so viele wahre oder eingebildete Wurzeln haben muss, als der Grad ihrer höchsten Potenz anzeigt.

Denn wenn eine Gleichung, welche eine unbekannte Größe enthält, wenigstens eine wahre oder eingebildete Wurzel haben muss, so muss sie auch wenigstens eine wahre oder eingebildete Wurzel haben, wenn sie nur noch eine unbekannte Größe enthält.

Jede Gleichung hat also wenigstens so viele wahre oder eingebildete Wurzeln, als der Grad ihrer höchsten Potenz anzeigt.

Die algebraischen Aufgaben werden durch Hülfe der Gleichungen aufgelöst. Hierbey müssen die Gleichungen die Bedingnisse jeuer Aufgaben enthalten und die Gleichung muß der vollkommen Ausdruck jeuer Aufgabe seyn.

Die angegebene Aufgabe soll durch Hülfe der Gleichung gelöst werden, derowegen alle unbekannte Größen zu bilden sind, daß sie die Bedingnisse, welche gegeben sind, vollkommen enthalten.

In der gegebenen Aufgabe sind drey Unbekannte, deren Hälfte, Drittheil und Viertheil zusammen genommen, als jene Unbekannte selbst betragen soll. Nennen wir diese Unbekannte $= x$ so ist $\frac{x}{2}$ = der Hälfte $\frac{x}{3}$ = jenen Drittheil, $\frac{x}{4}$ jenen Viertheil, da nun diese Theile der Zahl gleich werden sollen, so giebt die Aufgabe folgende: $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4}$ = der Zahl $x + 4$. derowegen die Gleichung $= \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = x + 4$, welche die angegebene Bedingnisse der Gleichung vollkommen ausdrückt.

Verbrauchstabelle über diese Steuerung, sowohl bezüglich der Übereinkommenden Größen mit angegebenen bekannten Größen als auch

Hülfsdreieck gefunden werden kann.

Man muß dabei die Steuerung, wenn der Dampfeintritt bezogen

die Verbindungen zu, öffnen, ausschließen.

Hiernach sieht, der Braun Steuerung verschließen soviel heißt,

als den Dampfeintritt unbekannten Steuerung zu bestimmen.

. . . .

. . . .

. . . .

Nun die Anzahl der Kriterien, somit man mit gegebenen

Größen zu einer Bestimmung nothwendig, wodurch andere

mit den zu einer Größe zum Resultat der Rechnung.

a.) Wenn man zu beiden Seiten des Steuerung addirt

oder subtrahirt, so bleibt die Steuerung in der Lage der Schie-

bung.

b.) Wenn auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens Glieder mit einer Größe multiplizirt oder dividirt sind, so muß die Größe auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens abermal multiplizirt

c.) Ebenso muß die Gleichheit des Gleichheitszeichens bestehen, wenn man auf beiden Seiten desselben zu gleichen Zahlen gleiche Zahlen addirt oder subtrahirt. z.B. die Gleichung wäre: $x + a = b$ so sieht man daß b und a durch Addition verbunden sind. Will man nun bei der selbe die Größe a heimen so gibt diese $x = b - a$. Man sieht hieraus daß $+a$ von x durch $-a$ aufgehoben wird, daß also in einem andern Teil der Gleichung mit $-a$ gesetzt wird.

Hieraus resultirt die allgemeine Regel:

d. Allgesetzliche Größen können aus der Gleichung zu einem andern Teile derselben gebracht werden, wenn ihre Zeichen verändert werden.

e.) Kann man mehrere gleiche Größen auf einer Seite der Gleichung weglassen, wenn nur auf der andern Seite ebenfalls gleiche Größen hinzugefügt werden.

Durch die gegebene Gleichung $\frac{x}{a} = d$ ist x für den Bruchstrich vollkommen bestimmt. Denn nun auf der Linie $\frac{x}{a}$ die Größe x genau so oft abgetragen werden als d mal die Einheit a in jener gegebenen Größe enthalten ist. Also $\frac{x}{a} \cdot a = d \cdot a$. $d = d \cdot a$.

Wenn in einer Gleichung Brüche sind, so muß der Nenner, durch welchen jeder Bruch dividirt ist, dadurch weggeschafft werden, daß man jedes Glied in die Gleichung mit diesem Nenner multiplizirt.

Ein merkwürdiger Lehrsatz:

Wenn irgend ein Glied der Gleichung einen Bruch enthält, so kann derselbe dadurch weggeschafft werden, daß man jedes andere Glied der Gleichung mit diesem Bruche dividirt, z. B. $a \cdot x = b - c + d$ mal a $x = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{d}{a}$ $(b - c + d) = x$.

Wenn die Gleichung $x^2 = a + b$ so müßte man selbst die Quadratwurzel aus x^2 die Quadratwurzel ziehen können. Welches aber eine noch zu lösende Aufgabe bleibt.

und dem zweiten Gliede $+b$ die Quadratwurzel gezogen werden soll, so muß $a+b$ $=d+h$ sein. Und gibt $x=\sqrt{a+b}$. Wenn die Quadratwurzel aus einer Summe gezogen werden soll, so muß diese Summe entweder selbst eine Quadratzahl sein, oder man muß die Gleichheit der Summe mit einer Quadratzahl herstellen können.

Wenn der Quadrat der Unbekannten einer Summe gleich ist, so muß diese Summe eine Quadratzahl sein, die Quadratwurzel ziehen und die Unbekannte selbst bestimmen.

Hätten wir $x=c+d$ so wird die Wurzel zum Quadrate erhoben werden müssen um x selbst zu erhalten, nun aber ist die Gleichheit der Summe bestanden zu haben mit $c+d$ gemacht werden. Also

$x=(c+d)^2=c^2+2cd+d^2$. Daraus folgt folgende Regel:

Wenn die Quadratwurzel der Unbekannten einer Unbekannten Größe gleich ist, so müssen beyde Seiten zum Quadrate erhoben werden, um den Unbekannten selbst zu bestimmen.

Einige Beispiele.

I $2x-a+b=d+h$

$2x=d+h+a-b$

$2x=d+h+a-b$

$x=\frac{d+h+a-b}{2}$

II $3x+ax=b-c$

$x(3+a)=b-c$

$x=\frac{b-c}{3+a}$.

III $a.y - \frac{c}{d} = b - h$

$a.y = b - h + \frac{c}{d}$

$y = \frac{ba}{a} \frac{h}{a} + \frac{c}{d.a}$

$y = \frac{b-h}{a} + \frac{c}{ad}$.

IV $3x - \frac{a}{b} = dx - h$

$3x = dx - h + \frac{a}{b}$

$3x - dx = -h + \frac{a}{b}$

$x(3-d) = -h + \frac{a}{b}$

$x = \frac{-h}{3-d} + \frac{a}{3b-bd}$

$x = \frac{a}{3b-bd} + \frac{-h}{3-d}$

V $\frac{ax}{b} = c + \frac{dx}{n}$

$anx = bc + \frac{bdx}{n}$

$anx = bcn + bdx$

$anx - bdx = bcn$

$x.(an-bd) = bcn$

$x = \frac{bcn}{an-bd}$.

VI $ax^2 = b + c + d$

$x^2 = \frac{b+c+d}{a}$

$x = \sqrt{\frac{b+c+d}{a}}$,

VII $\sqrt{x+b} - a = m$

$\sqrt{x} - a = m - b$

$\sqrt{x} = m - b + a$

$x = a - b + m$

$x = a^2 - 2ab + 2am + b^2 - 2bm + m^2$

VIII. $5x^2 + \frac{x^2}{2} = a + 4x^2$

$10x^2 + x^2 = 2a + 8x^2$

$10x^2 + x^2 - 8x^2 = 2a$

$3x^2 = 2a$

$x^2 = \frac{2a}{3}$

$x = \sqrt{\frac{2a}{3}}$

IX. $3,2x - 0,87 = 6,4x - 6,2$

$3,2x - 0,87 + 6,2 = 6,4x$

$-0,87 + 6,2 = 6,4x - 3,2x$

$+5,33 = 3,2x$

$x = 1,665$

X $3x+8-\frac{2}{3}x=5x-4$

$3x+8-\frac{2}{3}x-5x=-4$

$3x-\frac{2}{3}x-5x=-4-8$

$-2x-\frac{2}{3}x=-12$

$-\frac{6}{3}x-\frac{2}{3}x=-12$

$-\frac{8}{3}x=-12$ Division durch -1 multiplizieren gibt

$\frac{8}{3}x=12$

$8x=12.3=36$

$x=\frac{36}{8}=4\frac{4}{8}=4\frac{1}{2}$.

XI $2x-\frac{4x}{3}+\frac{2x}{5}+x=\frac{2}{3}$

$3x-\frac{20x+6x}{15}=\frac{2}{3}$

$45x-20x+6x=\frac{30}{3}$

$45x-26x=\frac{30}{3}$

$19x=\frac{30}{3}=10$

$x=\frac{10}{19}$.

XII $16x-\frac{x}{5}=\frac{x}{4}+8+3x$

$16x-\frac{x}{5}-\frac{x}{4}-3x=8$

$80x-x-\frac{5x}{4}-15x=40$

$320x-4x-5x-60x=160$

$x.(251)=160$

$x=\frac{160}{251}$

XIII $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x}{5}=4x-40$

$\frac{20x+10x-8x}{40}=4x-40$

$\frac{22x}{40}=4x-40$

$\frac{11x}{20}=4x-40$

$11x=80x-800$

$-80x-11x=800$ / $\cdot(-1)$

$69x=800$

$x=\frac{800}{69}$.

XIV $x=\frac{a+6}{d}-\frac{hx}{n}$

$x+\frac{hx}{n}=\frac{a+6}{d}$

$nx+hx=an+\frac{6n}{d}$

$x.(n+h)=an+\frac{6n}{d}=\frac{and+6n}{d}=n.\frac{ad+6}{d}$.

$x=n.\frac{(ad+6)}{d.n+h}$.

XI $\frac{x}{n} - \frac{ax}{m} + d = bx$

$\frac{x}{n} - \frac{ax}{m} = bx - d$

$\frac{x}{n} - \frac{ax}{m} - bx = -d$

$\frac{mx}{mn} - \frac{anx}{mn} - bx = -d$

$\left(\frac{m-an}{mn}\right).x - bx = -d$

$\left(\frac{m-an}{mn} - b\right).x = -d$

$m - an - bmn . x = -dmn$

$x = \frac{-dmn}{m-an-bmn}$

XII. $\frac{x}{a} + \frac{bx}{c} - \frac{dx}{n} = h+g$

$\frac{cnx + abnx - ac'dx}{ac'n} = h+g$

$cnx + abnx - ac'dx = h+g \times ac'n$

$x.(cn + abn - ac'd) = h+g \times ac'n$

$x = \frac{h+g \times ac'n}{cn + abn - ac'd}$.

XIII. $\frac{a}{x} + b = d + \frac{1}{x}$

$\frac{a}{x} + b - \frac{1}{x} = d$

$\frac{a}{x} - \frac{1}{x} = d - b$

$\frac{1}{x}(a-1) = d - b$

$a - 1 = dx - bx$

$a - 1 = (d-b)x$

$x = \frac{a-1}{d-b}$.

XVIII. $\frac{ax}{b+x} = \frac{dx}{h-1} - cx$

$\frac{ahx - ax}{bx} = dx - chx + cx$

$\frac{ah - a}{bxa} = d - ch + c$

$ah - a = bd - \frac{bch + bc + (d - ch + c).a}{(d-ch+c).a}$

$\therefore ah - a - bd = -bch + bc + (d - ch + c)a$.

$ah - a - bd + bch - bc = (d - ch + c)x$

$\frac{ah - a - bd + bch - bc}{d - ch + c} = x$.

XX $\frac{2a-x}{n} - 8 = 5x+2$

$\frac{2a-x}{n} = 5x+2+8$

$\frac{2a-x}{n} - 5x = 2+8=10$

$2a-x-5nx = 2n+8n=10n$

$x.(-1-5n) = 10n-2a$

$x = \frac{10n-2a}{(-1-5n)}$

$x = \frac{2a-10n}{1+5n}$.

XXI $\frac{n}{x} + 6x = \frac{5}{8} - d+i$

$n+6x = \frac{5x}{8} - dx+x$

$8n+86x = 5x - 8dx+8x$

$86x - 5x + 8dx - 8x = -8n$

$a.(86-5+8d-8) = -8n$

$x.(86+8d-13) = \frac{-8n}{86+8d-13} = \frac{-8n}{8(6+d)-13}$.

XXII $\frac{6x}{a+1} - d = ax - 3$

$\frac{6x}{a+1} = ax - 3+d$

$\frac{6x}{a+1} - axd = d-3$

$6x - a^2x - ax = (d-3).(a+1)$

$x.(6-a^2-a) = (d-3).(a+1)$

$x = \frac{(d-3).(a+1)}{6-a^2-a}$

XXVI $ax^2 - 6x^2 + dx = (3a+6).x - hx^2$

$ax - 6x + d = (3a+6) - hx$ / wenn sie sind daß

$ax - 6x + hx = 3a+6-d$

$x.(a-6+h) = 3a+6-d$

$x = \frac{3a+6-d}{a-6+h}$.

XXIII $\frac{ax}{c} + 3x = \frac{6x}{c} + 5x+1$

$\frac{ax}{c} + 3x - \frac{6x}{c} - 5x = 1$

$\frac{ax-6x}{c} + 3x - 5x = 1$

$ax - 6x + 3cx - 5cx = c$

$x.(a-6+3c-5c) = c$

$x = \frac{c}{a-6-2c}$.

Aufgabe.

Wenn soll man Zahlen finden deren Hälfte, Drittheil und Viertheil zusammengenommen um 5 kleiner, als die Zahl selbst.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} = \text{Zahl} - 5$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = x - 5$$

$$\frac{12x + 8x + 6x}{24} = x - 5$$

$$12x + 8x + 6x = 24x - 120$$

$$26x = 24x - 120$$

$$26x - 24x = -120$$

$$2x = -120$$

$$x = -\frac{120}{2} = -60.$$

II Aufgabe. Alexander der Große schenkte seinem Lehrer Aristoteles 2 Talente Goldes, Cäsar sagte: ich bin 2 Talente Goldes Schuldner und Pallas sagte: ich bin 2 Talente Goldes Schuldner. Wenn Alle 96 Talente hätten, so viel als alle 3 zusammengenommen. Wie viel hat jeder von ihnen?

$x + (x+2) + (2x+6) = 96$

$2x + 2 + 2x + 6 = 96$

$2x + 2x = 96 - 2 - 6$

$4x = 96 - 2 - 6$

$x = \frac{96-2-6}{4} = \frac{86}{4} = 21\frac{1}{2}$ Jahre [illegible] Lysimachus

$23,5$ " " Alexander als

$5\frac{1}{2}$ " " Aetes als

Summa 96 Jahre, [illegible] Alter des Callisthenes. Probe

II Aufgabe. Man [illegible] eine Zahl [illegible] welche die Eigenschaft hat daß die Summe von ihrer Hälfte, ihrer Drittel und Viertel um 2 größer ist als sie selbst ist. ——

$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = x + 2$

$\frac{12x + 8x + 6x}{24} = x + 2$

$12x + 8x + 6x = 24x + 48$

$2x - 24x = 48$

$-22x = 48$

$x = \frac{48}{-22} = 24.$

III Aufgabe. Wenn sich ein Künstler auf 60 Tage unter der Bedingung zu arbeiten verbindet, daß er an jedem Arbeitstage nebst dem Lohn $\frac{3}{4}$ Kreuzer, aber an

jeden Tag von dem versäumten $\frac{1}{4}$ K. und die Rechnung mit Einem Abschlusse 60 Tage zu folgendes geschehen Abrechnung 24 K. erhält, sonach die Frage: Wie viele Tage hat er gearbeitet und wie viele versäumt haben?

$$24 = x\frac{3}{4} - (60 - x) \cdot \frac{1}{4}$$

$$24 = \frac{3x}{4} - \frac{(60 - x)}{4}$$

$$24 = \frac{3x - 60 + x}{4}$$

$$96 = 3x - 60 + x$$

$$96 = 4x - 60$$

$$96 + 60 = 4x$$

$$x = \frac{96 + 60}{4} = \frac{156}{4} = 39 \text{ Tage.}$$

Auflösung.

Setzt man die Zahl der Arbeitstage = x, so muss man 60 - x die Tage versäumt haben, und da man täglich 3/4 K. verdient hat, so hat er x Tage gearbeitet hat, so hat er

Aufgaben sind solche, die sich damit zu beschäftigen, die Begebenheiten, wie wir uns dieselben zu erklären und uns mit anderen Menschen zu verständigen haben. Der Lehrer muss den Rest = 24 setzen. Da der Lehrer jeden Tag 3/4 K. erhält und x Tage gearbeitet hat, so hat er

Zweiter Theil Theilung 2/5 x A. Theilen wir den 60 Tage setzen 60 x Tage
mit Zusatz Theilung und setzen für Theil 5 S.S. 60 x 1/5 H. für Tage;
Siehe Theil Theilung die Theilung mit ebenen angestellt. —
V Ein Theilen übernehmen zweitag Theilung zu Theilen
und mit Theilen die Theil der zu Theilenden Theil,
2 Theil den Theil jeden Theilung und 3 Theil den zu einem
Theilbetrag; diesen abziehen Theil, wie viele Theilen
den Theil Theilung und wie viele von der 2 Theil Theil gelöscht
werden müssen, so soll man diese Theilen Theilung Theilung
finden.

Auflösung.

Die Zahl aller zu theilenden Theilen = a
Die Zahl der Theilen, von Theil = A, so ist die Zahl der
Theilen, der zu Theil Theil A — x, die man abziehen soll, damit
übrig bleiben Theilen, deren Zahl keine Theilen übrig lassen,
z. B. x, die Theilung und die Theilung der
Theilen Theil, dann, die Theilen Theilung ganzen
Theilen Theil, gerade Theilen übrig.
Man setze den Theil eines Theil des Theilen Theil = b
Theil, eines Theil der zu einem Theil = c, dann

Geldentsatz der ganzen Lieferung = d Forst das Pfund alles
Fasses der Essigen Partie = bx und das Pfund alles
Fasses der 2ten Partie = ac − cx. Der ganze Geldbetrag
ist die Summe aus, was sämtliche Fässer der ersten
und zweiten Partie kosten, die Gleichung wird folgendes
ausdrücken: $bx + ac - cx = d$

$$bx - cx = d - ac$$
$$x.(b-c) = d - ac$$
$$x = \frac{d - ac}{b - c}$$

Gebrauch dieser Formel, welche den Werth
x bestimmt gesuchter Lieferung, so lässt sich diese Formel
durch die Proberechnung ausdrücken

Es sey die Summe alles zu liefernden Fässer = 134 = a

Das Pfund eines Fasses der ersten Partie b = 11 ℔
Pfund eines Fasses der zweiten Partie c = 9 ℔ und
der Geldbetrag der ganzen Lieferung d = 1320 ℔ somit

$$x = \frac{d - ac}{b - c} = \frac{1320 - 134.9}{11 - 9} = \frac{114}{2} = 57 \text{ Fässer ehemaliger Art}$$

13 ℔
57
77 Fässer der 2ten Art.

Rede.

Die Frau Schwiegermutter vermacht dem Ehemann die Hälfte ihres Vermögens, der Tochter ein Zehntel und diesen Dienern den zurückbleibenden Geldbetrag, welcher ist. x

$\frac{x}{2}$

$\frac{x}{10}$

$\frac{x}{5}$

$\frac{5x}{10} + \frac{2x}{10} + \frac{x}{10} + 100 = x$

$\frac{8x}{10} + 100 = x$

$8x + 1000 = 10x$

$1000 = 2x$

$500 = x$

$62\frac{1}{2}$ fl. der zweite Diener

$62\frac{1}{2}$ fl. der erste Diener

375 fl. der Ehemann

125 fl. die Tochter

1320 fl. der übrige Geldbetrag

II. Aufgabe. Ein Kaufmann vermacht zur Erhaltung seines Hausgesindes jährlich 100 Kreuzer. Nimmt dieses eine Aufsagung nicht an, so soll es von seinem übrigen Vermögen so viel bekommen, als 3 Söhne, welche sich in das Theilen nicht verstehen, nicht mehr als 3 Kreuzer für Theilung des ganzen Vermögens geben sollen.

Auflösung.

Nimmt das Gesinde mit der Kreuzer seine Handel aufsagt = x Jahre, so zahlen die Erben x Jahre lang jährlich 100 Kreuzer, also $100x$ Kreuzer; die Erben haben $x - 100$ Jahre zu zahlen, da sie für diese Zeit eine Rente dieser Summe $\frac{1}{3}$ zu zahlen haben, so beträgt sein Vermögen zusammen $\frac{x - 100}{3} + x - 100 = \frac{3x - 300 + x - 100}{3} =$

$\frac{4x-400}{3}$.

Da nämlich am Anfange des 2ten Jahres mehr als 100 Louisd'or
davon wegnehme, so bleibt ihm zum Handhang $\frac{4x-400}{3}-100=$
$\frac{4x-700}{3}$.

Da nämlich dieser Hausvogt im Laufe des 2ten Jahres
nun ein Drittheil weniger hat, so macht sein Ende desselben
$=\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}=\frac{12x-2100}{9}+\frac{4x-700}{9}=\frac{16x-2800}{9}$

Da nun am Anfange des 3ten Jahres ihm die Hälfte
weniger als 100 Lo. ist, so hat dieser Hausvogt =
$\frac{16x-2800}{9}-100=\frac{16x-2800}{9}-\frac{900}{9}=\frac{16x-3700}{9}$.

Dieser Rest muß nun im Laufe des 3ten Jahres
abermal um ein Drittheil weniger und es bleiben
Ende desselben $=\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}=\frac{48x-11100}{27}+$
$\frac{16x-3700}{27}=\frac{64x-14800}{27}$

Da nun dieser Rest allemahl Anmerkung 1)
Capital als wovon gerechnet wird, so muß dasselbe

Lösung der Gleichung:

$$64x - 14800 = 2x$$

$$64x - 14800 = 54x$$

$$64x - 54x = 14800$$

$$x(64 - 54) = 14800$$

$$x(10) = 14800$$

$$x = \frac{14800}{10} = 1480 \text{ Lamidos}$$

Probe.

1480. — 100 Lamidos = 1380 / + ⅓ vermehrt
460
1840 wie viele als 11 Jahre
— 100 = 1740 / ⅓ vermehrt
580
2320 wie viele als 12 Jahre
— 100 = 2220 / + ⅓ vermehrt
740
2960 wie viele als 13 Jahre =
wie viel zugehalten als 11 Jahre.

1480
1480
1960 Lamidos

III Aufgabe. Wenn sich 2 Körper mit gegebenen Geschwindigkeiten entgegenkommen, nachdem sie Richtung bewegen und wenn kennt die Zeit, während welcher sie sich begegnen, den Augenblick des Zusammentreffens oder Begegnung ist, bestimmen zu gehörigen

seine Lampe zu gleicher Zeit anzündet, so fallen von der Zeit an, wann der 2te
den ersten anzündet?

Auflösung.

Es sey die Geschwindigkeit des ersten = a

die Geschwindigkeit des zweiten = b, nachdem b geschwinder als a ist, die Zeit, wann der zweite die Lampe des letzten anzündet = x, und die Zeit, wann der zweite die Lampe des letzten anzündet, sey = c und die Zeit, wann der zweite seine Lampe des letzten bis dahin anzündet, wann der erste angezündet wird = x.

Der zurückgelegte Raum wird durch sein Produkt aus der Geschwindigkeit und die Zeit bestimmt = ac und der Raum, welchen er noch zurückzulegen hat, bis er den ersten anzündet = ax.

Der zweite geschwinder mit der Geschwindigkeit von b in der Zeit x kommt, hat den zurückzulegenden Raum = bx.

Nun ist im Augenblicke des Zusammenkunft bey der Lampe der selbe Raum zurückgelegt, daher wird die Gleichung diese: $bx = ax + ac$

$$bx - ax = ac$$

$$x \cdot (b - a) = ac$$

$$x = \frac{ac}{b - a}.$$

VIII. Aufgabe. Ein Kaufmann kauft Ganz zum Hundert Leinwand 100 Ellen Leinwand mehr, sagt er Hundert: es seyen 5 Pfund zu wenig gewesen, sie hätten die Hundert 5 Pfd. kosten sollen um 100 Ellen zu viel, und dann wie viel man für eine Elle $\frac{x+5}{100}$ zu bezahlen habe. Da die unbekannte Münze ein Pfund Ganz für 80 Ellen um 3 Pf zu viel bezahlt, so kommt man für diese 80 Ellen $x-3$ Pfund, daher zu einer Elle $\frac{x-3}{80}$ Wenn zwey Brüche gleich sind, die beide Zähler 1 haben, so kann man selbe durch die Gleichheit der Nenner verbinden und in eine Gleichung bringen, wo nur ein Unbekannte Buchstaben zu suchen

Auflösung.

Die unbekannte Zahl des Pfunds $= x$. Da nun 100 Ellen Leinwand 5 Pfund zu wenig waren, so hätten die Hundert $x+5$ Pfd. kosten sollen um 100 Ellen zu viel, und dann wird man für eine Elle $\frac{x+5}{100}$ zu bezahlen haben. Da die unbekannte Münze ein Pfund Ganz für 80 Ellen um 3 zu viel bezahlt, so kommt man für diese 80 Ellen $x-3$ Pfund, daher zu einer Elle $\frac{x-3}{80}$ Wenn zwey Brüche gleich sind, die beide Zähler 1 haben, so kann man selbe durch die Gleichheit der Nenner verbinden und in eine Gleichung bringen, wo nur ein Unbekannte Buchstaben zu suchen

Satz. $\frac{x+5}{100} = \frac{x-3}{80}$

$$\frac{80x+400}{100} = x-3$$

$$80x+400 = 100x-300$$

$$400+300 = 100x-80x$$

$$700 = (20)\,x$$

$$x = \frac{700}{20} = 35 \text{ Pfund.}$$

Verkauft 35 Pfund gebrauchte Waare, so geben 35 + 5 Pfund das
nöthige für 100 Ellen, wenn sie gut ist, das 1 Pfund 2½ Ellen
Tuch geben.

IX. Aufgabe. folgt.

Auflösung von Aufgaben mit zwei unbekannten Größen.

Die Erforderniß einer Aufgabe haben gezeigt, wie das Vorkommen
zweier einzigen unbekannten Größen Ursache werden
kann, warum dieselben in Verbindung mit bekannten
Größen nicht aufgelöst in der Gleichung vorkömmt; aber,
so haben diese Auflösungen gezeigt, daß diese unbekannten
Größen nur einer einzigen Bestimmung haben können, weil
sonst auch diese Aufgaben Erscheinungen annehmen würden.
Es entstehen nämlich, wenn solche zwei unbekannten,
welche in einer Aufgabe vorkommen, jede von einer
absonderlichen nur einzigen Bestimmung
haben kann.

Wenn nun die Aufgaben zweier unbekannten
Größen erfüllt und deutlichen Bedingungen

2 Gleichungen so gebildet werden können, so zwar, daß jede von ihnen, die noch unbekannten Größen, mehr als bekannte enthält, so würden von für jede der selben unendlich viele Werthe finden können.

Würden wir nun jede dieser beyden Gleichungen nach den verschiedenen Größen, den Werth der einen unbekannten z. B. jenen wohl so bestimmen, daß er in den einen Gleichungen allein; hingegen in der Verbindung mit beyden einen 2ten Theil, statt so kommen wir diesen beyden Gleichungen jedesmal eine einzige bilden, welche nicht mehr die Größen, sondern nur noch bekannten Größen enthält. In dieser neuen Gleichung wird man nun den Werth der unbekannten Größen bestimmen können.

Setzt man nun diesen Werth in die gegebenen Gleichungen, welche als Grundgleichungen gegeben sind, so wird die Größe allein in einem Theile bringen kann, läßt sich dieser allemahl mit genommen

Wie man nun die 2 Gleichungen, welche als Grundgleichungen gegeben sind, zuerst die Größe allein in einem Theile

wodurch dieser zweifache Bruch vereinfacht wird.

Allgemein wird dieß Verfahren Analysis genannt, in welcher Größen
so wie in der Arithmetik mit bekannten Größen verbunden
und diese hierdurch bestimmt werden können. Wird aber der
Fall gefunden, wo Analysis mit zwei Unbekannten Gleichungen
gestellt, so kommt noch hinzu das Verfahren, diese gefundenen
Gleichungen zu eliminiren, z. B. Es seyen die beyden gegebenen Gleichungen

Folgende: 1) $ax - y = bx$

2) $2y + a = 4x$. Bestimmen wir den 1ten der Bruch

aus 1. $ax - y = bx$. die 2te Gleichg. gibt $2y + a = 4x$

$ax = bx + y$

$ax - bx = y$

$x(a-b) = y$

$x = \frac{y}{a-b}$

$4x = 2y + a$

$x = \frac{2y+a}{4}$

Werden x in der gefundenen Bruch
gleichungen, so erhalten wir beyde
Gleichungen zusammen.

$\frac{y}{a-b} = \frac{2y+a}{4}$

$\frac{4y}{a-b} = 2y + a$

$4y = 2ay - 2by + a^2 - ab$

$4y - 2ay + 2by = a^2 - ab$

$y(4 - 2a + 2b) = a^2 - ab$

$y = \frac{a^2 - ab}{(4 - 2a + 2b)} = \frac{(a-b) \cdot a}{2(2 - a + b)}$.

wodurch der Wert von y ebenfalls in bekannten Größen bestimmt ist. Um nun den Wert von x zu finden, trägt man diesen gefundenen Wert von y in eine der angegebenen 2 Gleichungen z. B. in $x = \frac{y}{a-b} \cdot \frac{x}{(2(a-a+b)} : a-b = \frac{a}{2(2-a+b)}$ wodurch nun die einzige Wert von x und y bekannt sind. Setzt man den Wert von y in die 2te Gleichung, nemlich $x = \frac{2y+a}{4} = \frac{2y}{4} + \frac{a}{4} =$ so wird $x = \frac{a}{4} + \frac{y}{2}$

$$x = \frac{a}{4} + \frac{(a-b).a}{2(2-a+b) \cdot 2} = x = \frac{a}{4} + \frac{(a-b).a}{4(2-a+b)} = \frac{2a-a^2+ab+a^2-ab}{4.(2-a+b)}$$

$$= \frac{2a}{4.(2-a+b)} = \frac{a}{2(2-a+b)}.$$

Da es mühsam ist, wenn man nach den beyden Grundgleichungen zuerst den Wert von x zu bestimmen soll, folgende Berechnungsart, wo man zuerst den Wert von y bestimmt machen soll. Aus der ersten Gleichung wird $y = ax - bx$ und aus der 2ten $y = \frac{4x-a}{2}$. Setzt man diese beyden Werte einander gleich, so gibt es

$$ax - bx = \frac{4x-a}{2}$$

$$2ax - 2bx = 4x - a$$

$$2ax - 2bx - 4x = -a$$

$$a - 2bx = 2ax + 4x$$

$$a = x.(2b - 2a + 4)$$

$$x = \frac{a}{2b-2a+4} = \frac{a}{2(b-a+2}$$ wie oben.

Wenn nun den Wert von y finden wollen wir in die obige Gleichung $y = \frac{4x-a}{2}$, nun substituieren wir in diesen Wert x.

$$y = \frac{4x}{2} - \frac{a}{2} = 2x - \frac{a}{2}$$

$$y = \frac{2a}{2.(6-a+2)} - \frac{a}{2} = \frac{a}{(6-a+2)}$$

$$\frac{2a}{2(6-2a+2)} - \frac{a}{2} = \frac{4a - 2ab + 2a^2 - 4a}{4(6-2a+2)}$$

$$y = \frac{2a^2 - 2ab}{4.(6-2a+2} = \frac{2a^2-2ab}{4b-8a+8} = \frac{a^2-ab}{2b-4a+4} =$$

$$y = \frac{a.(a-b)}{2.(b-2a+2)}$$

II. Aufgabe.

Die gegebenen Gleichungen seien folgende:

b $3x - \frac{1}{2}y = 20 = x = \frac{20}{3} + \frac{y}{6}$

v $5x + 3y = 36 \quad x = \frac{36-3y}{5}$

$$\frac{20}{3} + \frac{y}{6} = \frac{36-3y}{5}$$

$$\frac{100}{3} + \frac{5y}{6} = 36 - 3y$$

$$100 + \frac{15y}{6} = 108 - 9y$$

$$600 + 15y = 648 - 54y$$

$$15y = 648 - 54y - 600$$

$$15y + 54y = 648 - 600$$

$$y(69) = 648 - 600$$

$$y = \frac{48}{69} = \frac{16}{23}$$

Versuch $x = \frac{20}{3} + \frac{2y}{6} = x = \frac{20}{3} + \frac{16}{23} = x = \frac{20}{3} + \frac{16}{138} = \frac{2760+48}{414} = \frac{2808}{414} =$

$= \frac{1404}{207} = 6\frac{162}{207}$

III^te Aufgabe. 1te Art

I. $4x = 3y - 2x = 4x + 2x - 3y$

II. $10x + 2y = 12$

$x(4+2) = 3y$

$x = \frac{3y}{6}$

$10x = 12 - 2y$

$x = \frac{12 - 2y}{10}$

$\frac{3y}{6} = \frac{12 - 2y}{10}$

$3y = \frac{72 - 12y}{10}$

$30y = 72 - 12y$

$30y + 12y = 72$

$y(30+12) = 72$

$y = \frac{72}{42} = \frac{36}{21} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$

Substituiren d. Gl. x. x.

$x = \frac{3y}{6} = \frac{12}{7} \times 3 = \frac{36}{7} \times 6 =$

$\frac{36}{42} = \frac{6}{7}$.

2te Art

I. $y = -\frac{2x}{3}$

II. $y = \frac{12 - 10x}{2}$.

$-\frac{2x}{3} = \frac{12 - 10x}{2}$

$-2x = \frac{36 - 30x}{3}$

$-6x = 36 - 30x$

$30x - 6x = 36$

$x(24) = 36$

$x = \frac{36}{24} = \frac{6}{7}$

Substituiren

$y = \frac{12 - 10x}{2} = 12 - \frac{60}{7} = \frac{84 - 60}{7} = \frac{24}{7} : 2 = \frac{24}{7} \times \frac{1}{2} =$

$\frac{24}{14} = 1\frac{10}{14} = 1\frac{5}{7}$.

IV Aufgabe.

1) $2ax - 3by = c$ = $2ax - 3by = c$

$2ax = c + 3by$

$x = \frac{c+3by}{2a}$

2) $4ay + 6x = d$ /3

$6x = d - 4ay$

$x = \frac{d-4by}{6}$

$\frac{d-4ay}{6} = \frac{c+3by}{2a}$

$d - 4ay = \frac{6c+3by}{2a}$

$2ad - 8a^2y = 6c + 3b^2y$

$-8a^2y - 3b^2y = 6c - 2ad$ gestrichen!

$2ad - 6c = 8a^2y + 3b^2y$

$y(8^2+3b^2) = 2ad - 6c$

$y = \frac{2ad-6c}{(8a^2+3b^2)}$

$x = \frac{c+3by}{2a} = x = \frac{c}{2a} + \frac{3b}{2a} \times \frac{2ad-6c}{8a^2+3b^2}$.

V Aufgabe.

1) $\frac{a}{c-x} = \frac{b}{2a+y}$ = $a = \frac{cb-bx}{2x+y}$

2) $6x - y^2 = c$ /3

$-y = c - 6x$

$y = 6x - c$

$2a^2 + ay = cb - bx$

$ay = cb - bx - 2a^2$

$y = \frac{ab - bx - 2a^2}{a}$.

$$\frac{cb - bx - 2a^2}{a} = bx - c$$

$$cb - bx - 2a^2 = abx - ac$$

$$cb - bx - 2a^2 - abx = -ac$$

$$-bx - 2a^2 - abx = -ac - cb$$

$$-bx - abx = -ac - cb + 2a^2$$

$$ac + cb - 2a^2 = bx + abx$$

$$ac + cb - 2a^2 = x \cdot (b + ab)$$

$$x = \frac{ac + cb - 2a^2}{b + ab}$$

$$-\frac{c - ac}{1 + a} = \frac{ac + bc - 2a^2 - ac - c}{1 + a} = \frac{bc - 2a^2 - c}{1}$$

Substituirt

$$y' = bx - c$$

$$y' = \frac{ac + cb - 2a^2}{b + ab} \cdot b - c$$

$$y'' = \frac{ac + cb - 2a^2}{b + ab} \cdot b - c =$$

$$= \frac{abc + b^2c - 2a^2b}{b + ab} =$$

$$= \frac{ac + bc - 2a^2}{1 + a} - \frac{c}{1} = \frac{ac + bc - 2a^2}{1 + a}$$

VI. Aufgabe.

Substituirt

1) $\frac{b + x}{2} = 3y =$ $b + x - 6y$

$x = 6y - b =$

2) $\frac{b - y}{3} = 5x$

$b - y = 15x$

$x = \frac{b - y}{15} =$

$6y - b = \frac{b - y}{15}$

$90y - 15b = b - y$

$90y + y = b + 15b$

$91y = 16b$

$y = \frac{16b}{91}$

VII. Aufgabe

Ein Mädchen zwei Mannsleute die Mauer ab zwei Knechte 2h die Mauer ab Knechte 8 dr. &c

sollen wir beyden 80 Mann so zusammensetzen, dass beim
Mann der Besatzung 32 kr. und beim Mann
der Bedienung 24 kr. verdienen?

I. $x + y = 80$. $\underline{x = 80 - y}$

II. $24x + 48y = 2560$

$24x = 2560 - 48y$

$x = \frac{2560 - 48y}{24} =$

Substituirt

$x = 80 - y = 80 - \frac{640}{24} =$

$= \frac{1920 - 640}{24} = \frac{1280}{24} = 53\frac{1}{3}$

$80 - y = \frac{2560 - 48y}{24}$

$1920 - 24y = 2560 - 48y$

$1920 - 24y + 48y = 2560$

$48y - 24y = 2560 - 1920$

$y(48 - 24) = 2560 - 1920$

$y = \frac{640}{24} = \frac{320}{12} = 26\frac{2}{3}$

also darf man $26\frac{2}{3}$ Mann bedienen, $53\frac{1}{3}$ Kanonen.

VIII. Aufgabe.

Ein Feldherr, welcher 6 Tagereisen weit dienen muß hat zu
Tage 8 Meilen, die Einnahme seines Dienstlohnes, welche
ist: $\frac{1}{5}$ seines wöchentlichen Dienstgeld beträgt
Anfangs ab $\frac{1}{4}$ seiner Zeit, die er schon Dienste
Wie lange hatte er gedient wird wie lange müsste er
noch dienen.

Auflösung

1. $x + y = 6. = x = 6 - y$

2) $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = x = \frac{5y}{4}$

$4x = 5y$

$x = \frac{5y}{4}$

Substituirt

$6 - y = \frac{5y}{4}$

$24 - 4y = 5y$

$-4y = 5y - 24$

$-4y - 5y = -24$

$24 = 5y + 4y$

$24 = 9 \cdot y$

$y = \frac{24}{9} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

$x = 6 - y = 6 - \frac{8}{3} = \frac{18 - 8}{3} =$

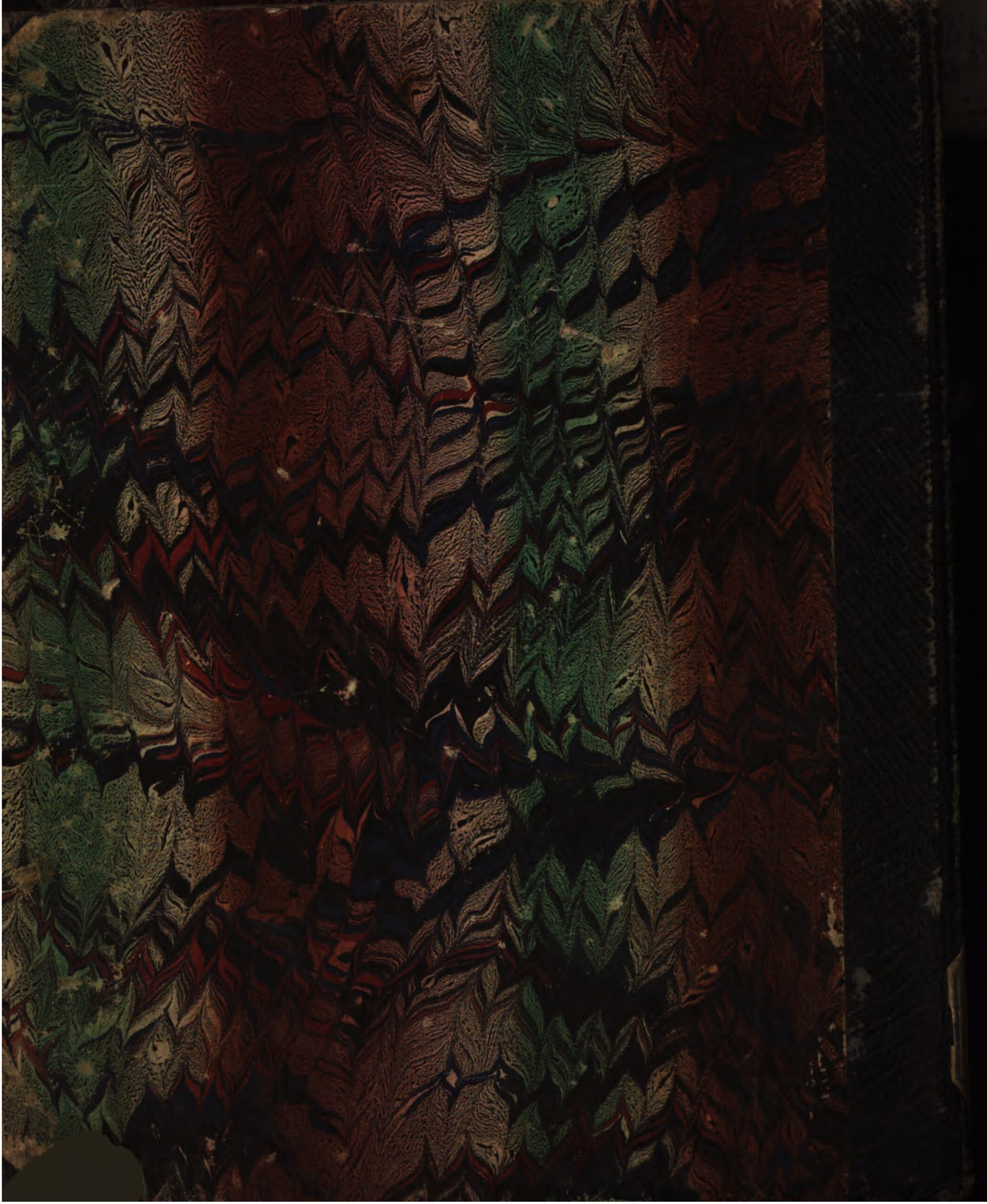
$= \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}.$

also $3\frac{1}{3}$ Jahre sollen sie zusammen $2\frac{2}{3}$ Jahre müssen sie dienen.

IX. Aufgabe.

1. $x + 2y = 50$

2). $\frac{3}{4}x + \frac{5}{6}y = 40.$



BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lehre von der Algebra

[Regensburg] [ca.1849]

Regensburg, Staatliche Bibliothek -- 999/Philos.3469a
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11302065-6